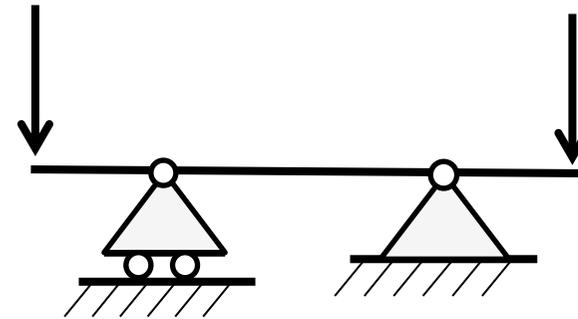
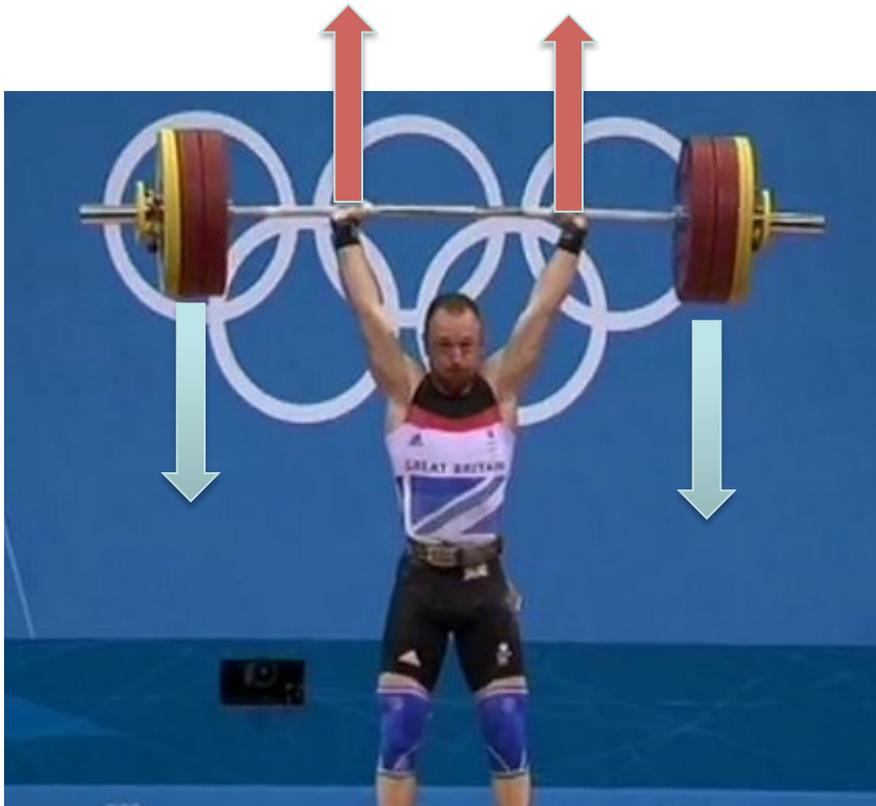


Sollecitazioni semplici

La flessione

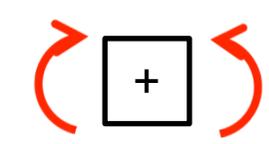
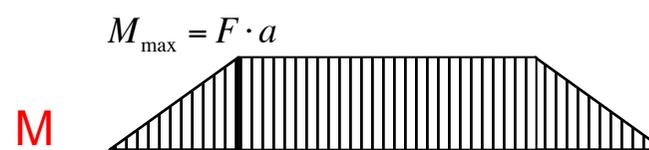
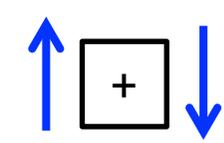
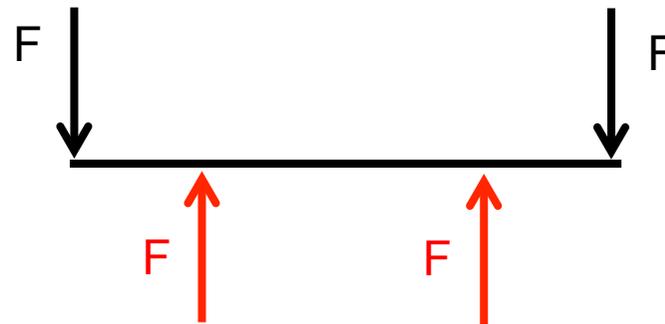
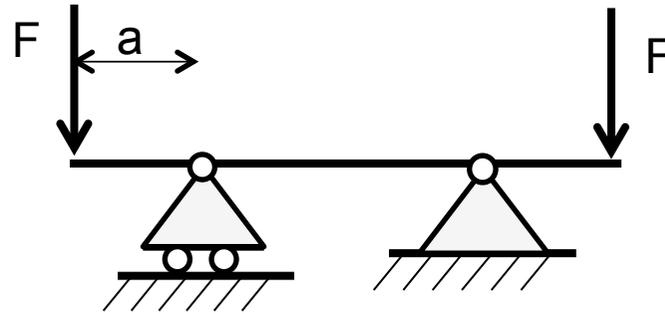
Considerazioni introduttive

- Un altro tipo di sollecitazione semplice particolarmente importante è la **flessione**, ossia lo stato di sforzo conseguente all'applicazione di un **momento flettente**
- Occorre sottolineare subito che nella pratica ingegneristica non è frequente incontrare casi di flessione "pura", mentre più spesso questa risulta essere accompagnata da azioni di taglio o momento torcente.



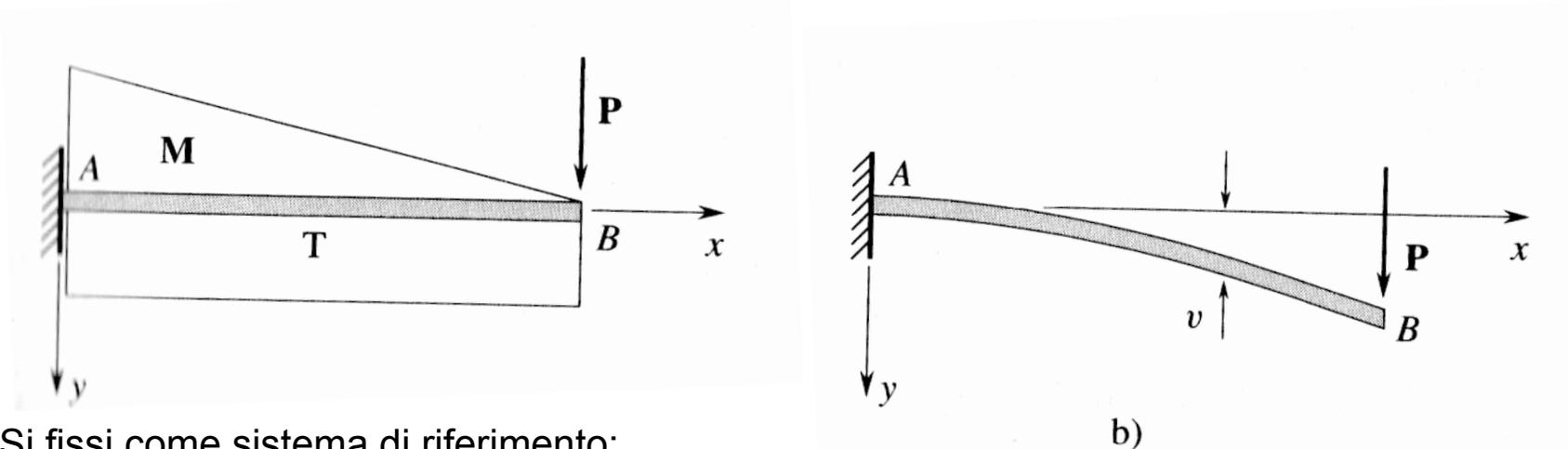
- L'atleta sostiene la barra con le mani equidistanziate rispetto alla posizione dei dischi
- **Ciò produce una flessione pura della parte centrale della barra**

Considerazioni introduttive



Considerazioni introduttive

Consideriamo il caso di una trave incastrata ad una estremità (mensola) caricata sull'estremo libero da una forza concentrata



Si fissi come sistema di riferimento:

- 1) un asse x coincidente con l'asse della trave
- 2) un asse y , nella cui direzione agisce il carico concentrato
- 3) un asse z , ortogonale al piano formato da x e y a formare una terna destrorsa

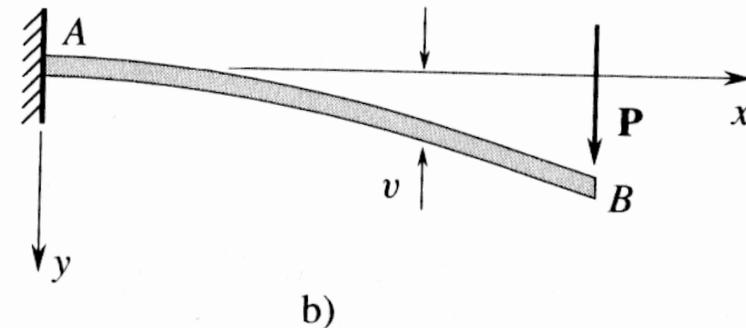
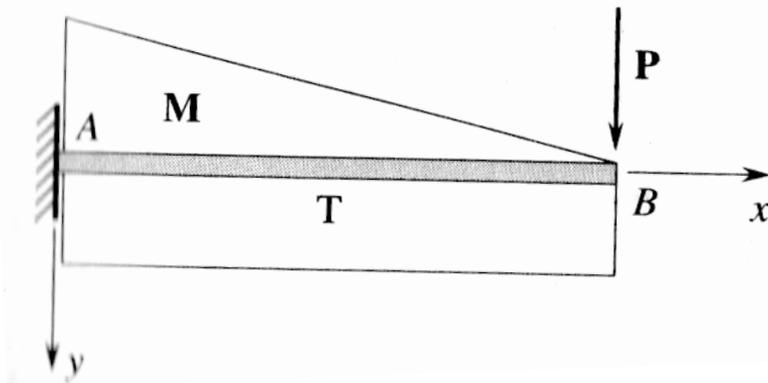
Il momento flettente è un vettore perpendicolare all'asse delle x e allineato con l'asse z

L'analisi delle azioni interne per questa struttura mostra che:

- **Il taglio è costante** lungo tutta la trave (e positivo secondo le nostre convenzioni)
- **Il momento flettente varia linearmente** da zero (punto di applicazione del carico) al valore massimo in corrispondenza della sezione di incastro. **Le fibre tese sono in alto**

Considerazioni introduttive

La determinazione degli **sforzi** indotti dalla presenza del momento flettente passa per lo **studio del modo di deformarsi** della struttura



- Inizialmente si prenderanno in considerazione travi a sezione prismatica simmetriche rispetto all'asse y e soggette a momento flettente giacente nel piano xy
- Per effetto del momento la trave si inflette e un suo generico tratto, inizialmente rettilineo, si deforma **mantenendosi nel piano xy** (che viene chiamato **piano di inflessione**).
- Indicheremo, inoltre, lo spostamento di un generico punto su questo piano con v .

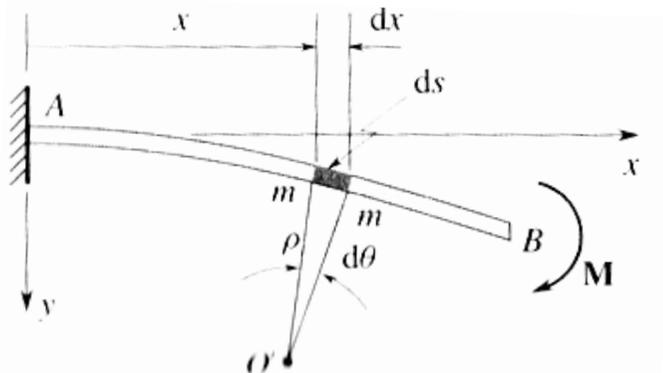
Calcolo delle deformazioni

Le fibre di una trave inflessa, inizialmente rettilinee, per effetto della flessione si deformano secondo **linee curve**. È intuitivo osservare che l'entità di tale curvatura è funzione dello stato di sforzo

Si definisce **curvatura di una linea in un punto la grandezza:**

$$\Gamma = \frac{1}{\rho} \quad \left[\frac{1}{m}, m^{-1} \right]$$

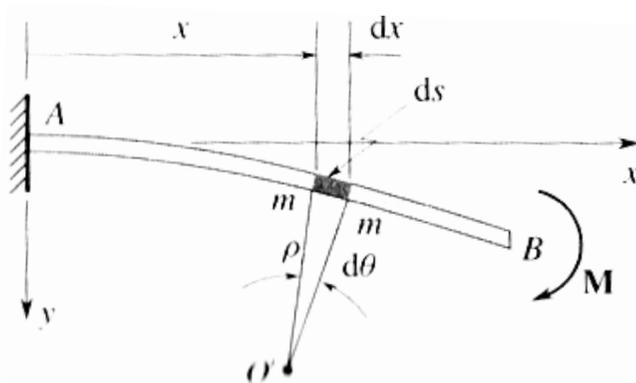
espressione nella quale ρ rappresenta il **raggio di curvatura**, ossia il raggio della circonferenza tangente alla curva che localmente approssima meglio la curva stessa



- Dalla figura si può osservare che due punti adiacenti disposti lungo una fibra longitudinale, distanti **dx** nella configurazione indeformata, nella configurazione deformata vanno a costituire il segmento infinitesimo **ds**
- **In funzione della loro posizione, le fibre possono allungarsi (sopra in questo caso) o accorciarsi (sotto)**
- Poiché per ipotesi le sezioni, pur ruotando, restano piane, all'interno della sezione **troveremo almeno una fibra che non si allunga né si accorcia**. Concentriamo su questa la nostra attenzione

Calcolo delle deformazioni

Le normali alle fibre nei due punti (inizialmente tra loro parallele) dopo l'inflessione si intersecano nel punto O' chiamato **centro di curvatura**.

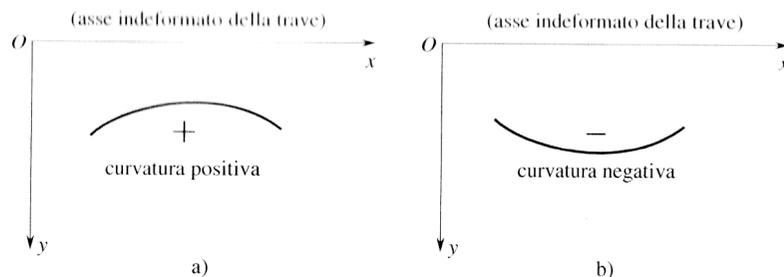


La relazione che lega il raggio di curvatura ρ all'elementino infinitesimo ds è:

$$\rho \cdot d\theta = ds$$

Poiché stiamo ragionando sull'ipotesi che la fibra non si allunghi né si accorci, possiamo scrivere

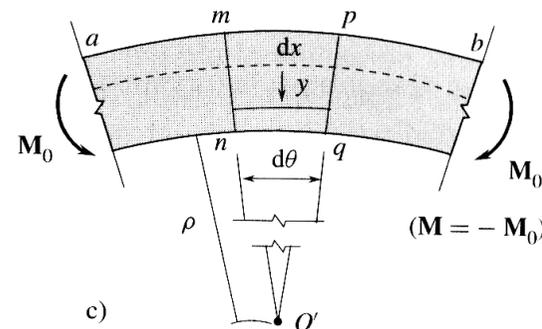
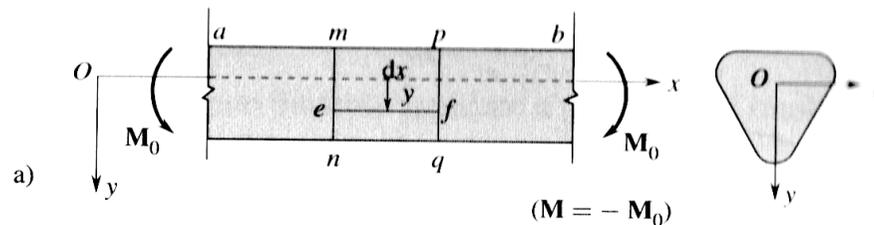
$$\Gamma = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\frac{ds}{d\theta}} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx}$$



La convenzione riguardo al segno della curvatura prevede che essa sia positiva quando **la concavità è rivolta verso la direzione positiva degli spostamenti «v»** e negativa nel caso opposto

L'asse neutro

Per determinare le **deformazioni associate alla curvatura della trave** si faccia riferimento alla porzione di trave soggetta al momento flettente esterno \mathbf{M}_0 e rappresentata in figura



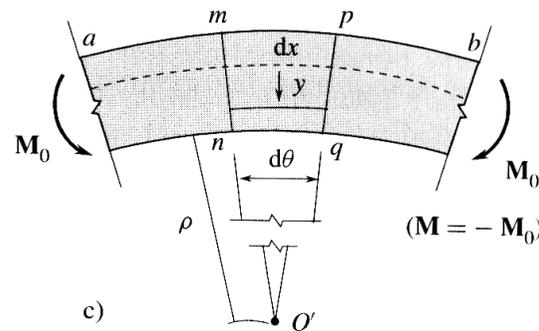
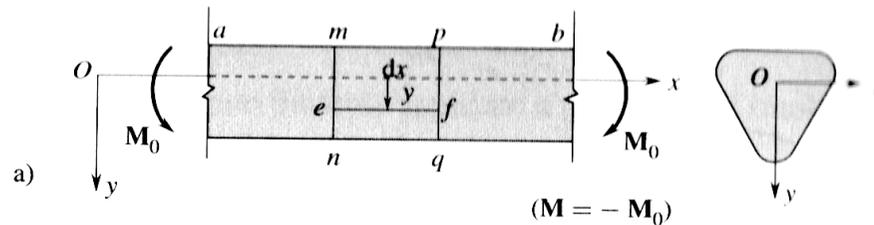
- Per effetto dell'azione del momento, l'asse della trave s-s prende la forma di un arco di circonferenza di raggio ρ
- Due sezioni adiacenti (m-n e p-q) ruotano l'una rispetto all'altra attorno ad un asse perpendicolare al piano xy mantenendosi piane.
- A seguito di tale rotazione le fibre situate sulla parte convessa si **allungheranno** mentre quelle situate sulla parte concava si **accorceranno**

Le fibre che non si allungano né si accorciano sono disposte, nella configurazione indeformata, in un piano che, intersecando una generica sezione normale all'asse x, forma un segmento che viene chiamato **asse neutro** (nella figura diretto come z)

L'asse neutro

La rotazione relativa tra due sezioni adiacenti, poste a distanza dx , è pari a $d\theta$ e le fibre che passano per l'asse neutro mantengono invariata la propria lunghezza ossia

$$dx = \rho \cdot d\theta$$

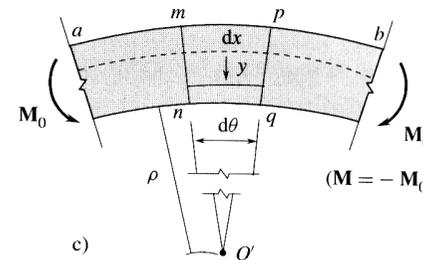
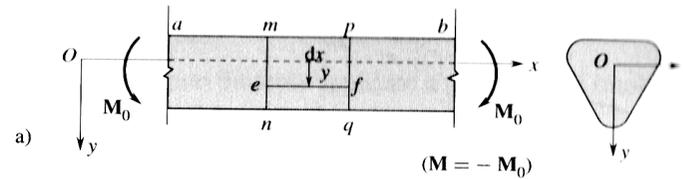


- Tutte le altre fibre che non passano per l'asse neutro si allungano o si accorciano e quindi subiscono una variazione di lunghezza ΔLx
- Il valore di ΔLx si può determinare sottraendo alla lunghezza iniziale dx di una fibra posta alla distanza y dall'asse neutro (la fibra e-f in figura) la lunghezza L_1 assunta a seguito della flessione

$$L_1 = (\rho - y) \cdot d\vartheta = \rho \cdot d\vartheta - y \cdot d\vartheta = dx - \frac{y}{\rho} dx \quad [m]$$

L'asse neutro

$$dx = \rho \cdot d\theta$$



$$L_1 = (\rho - y) \cdot d\vartheta = \rho \cdot d\vartheta - y \cdot d\vartheta = dx - \frac{y}{\rho} \cdot dx$$

La variazione di lunghezza vale allora:

$$\Delta L_1 = L_1 - dx = -\frac{y}{\rho} \cdot dx$$

E la deformazione vale dunque:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L_1}{dx} = -\frac{y}{\rho} = -\Gamma y$$

Dunque le deformazioni sono **proporzionali alla curvatura e variano linearmente con la distanza y dall'asse neutro**

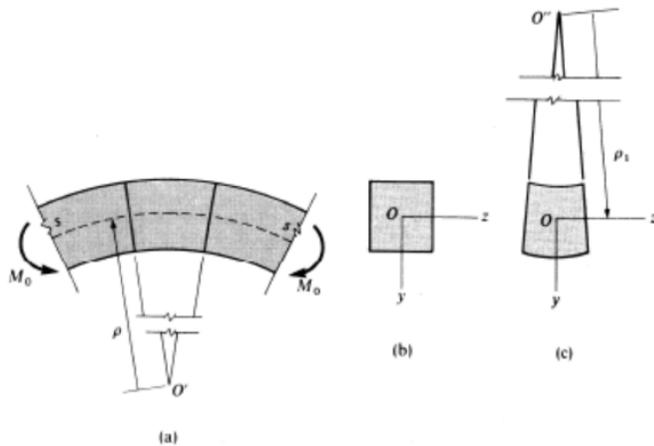
Le deformazioni trasversali

Per effetto della contrazione trasversale, alle deformazioni assiali ε_x si accompagnano deformazioni trasversali determinabili utilizzando il coefficiente di Poisson

$$\varepsilon_y = -\nu \cdot \varepsilon_x = \nu \cdot \Gamma \cdot y$$

$$\varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_x = \nu \cdot \Gamma \cdot y$$

Quindi anche le sezioni trasversali cambiano forma. **La larghezza della sezione diminuisce al di sopra dell'asse neutro e aumenta al di sotto.**



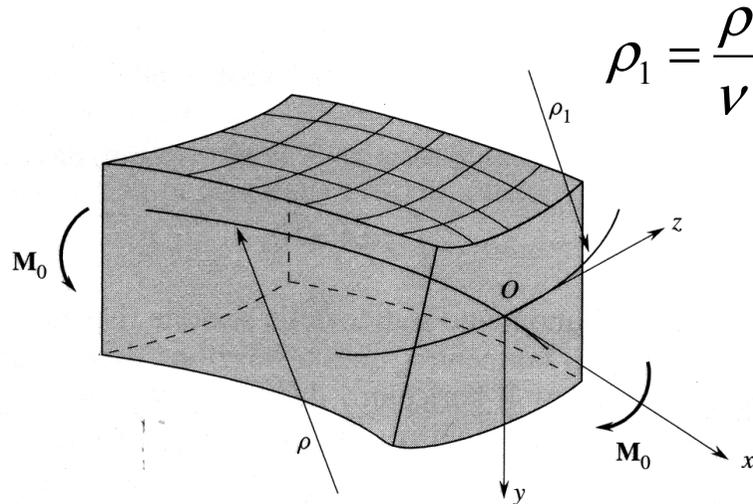
Poichè le deformazioni assiali variano linearmente con y , i lati di questa sezione si mantengono rettilinei, mentre le basi si incurvano in modo da mantenere la perpendicolarità con i lati.

Si ha quindi **una curvatura secondaria**, in direzione perpendicolare a quella principale dell'asse della trave

$$\rho_1 = \frac{\rho}{\nu}$$

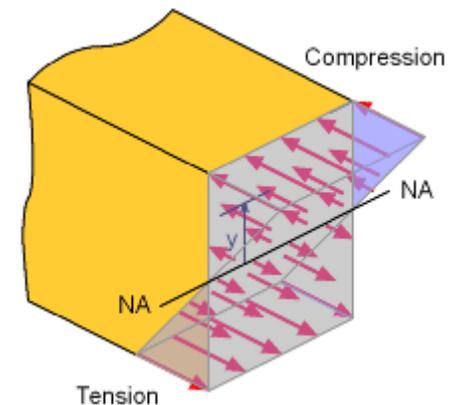
Le deformazioni trasversali

L'effetto globale è quello rappresentato in figura



Per effetto del momento si generano due curvatures di segno opposto su piani mutualmente perpendicolari

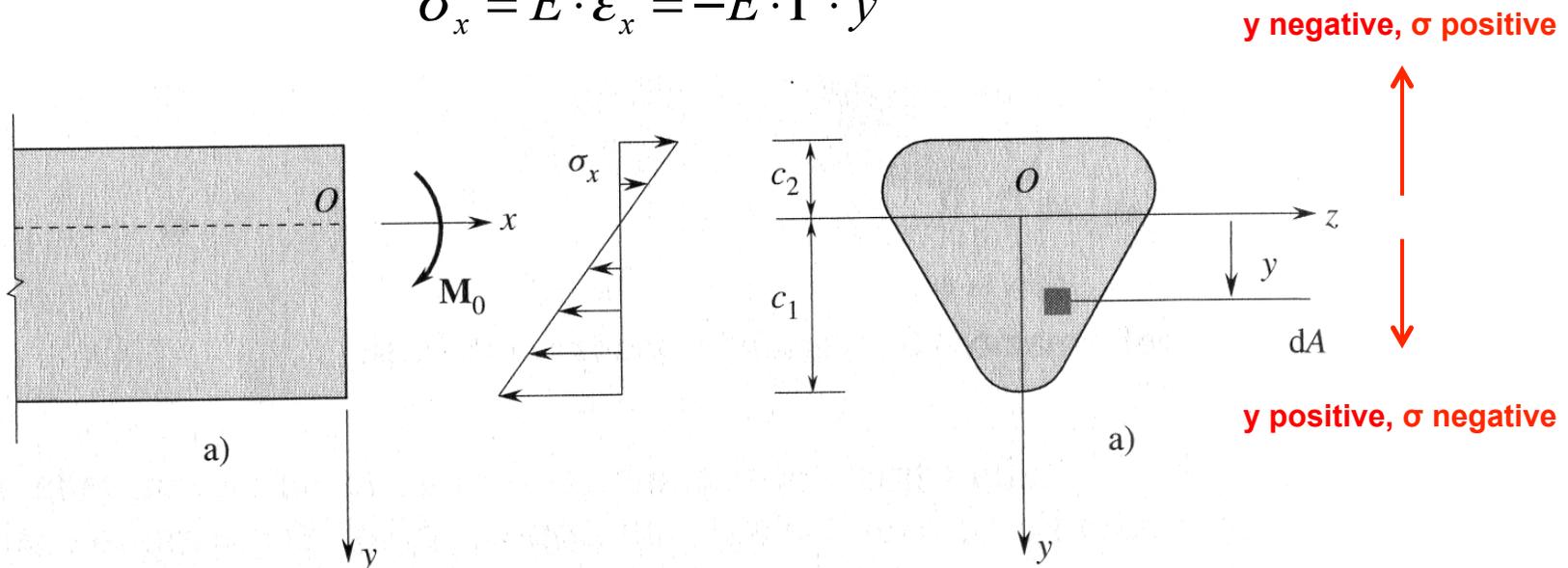
E la trave assume una forma simile ad una sella



Espressione degli sforzi

Una volta che sono note le deformazioni, si può risalire all'entità degli sforzi introducendo il legame elastico espresso dalla legge di Hooke

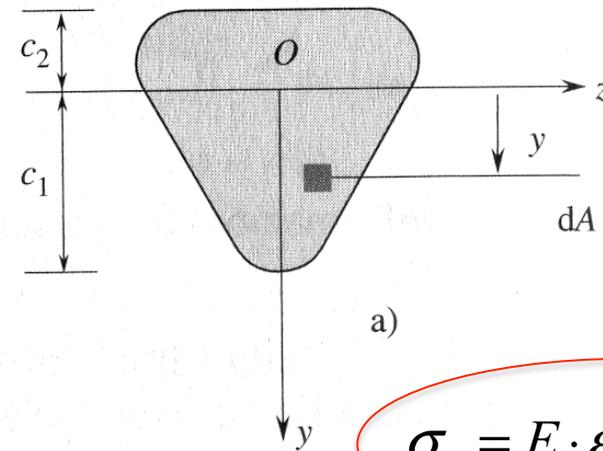
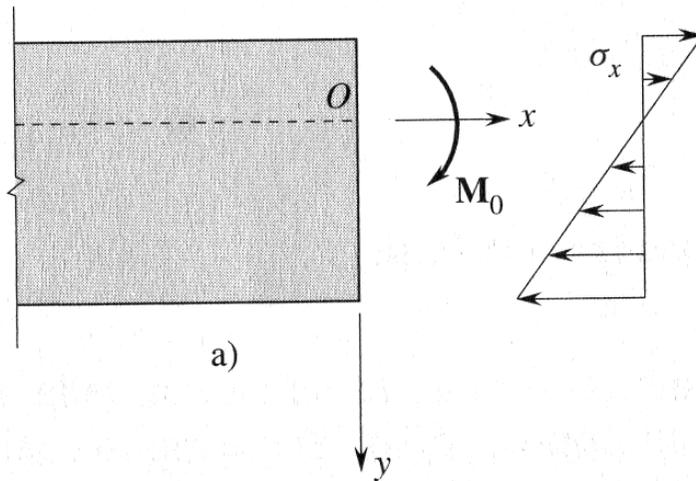
$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = -E \cdot \Gamma \cdot y$$



- E quindi, **anche gli sforzi variano linearmente con la coordinata y** , che esprime la distanza dall'asse neutro.
- Nella configurazione ipotizzata, **gli sforzi al di sopra dell'asse neutro sono di trazione**, mentre **al di sotto si osservano sforzi di compressione**
- **Gli sforzi raggiungono il massimo valore in superficie!!!**

Espressione degli sforzi

Finora la posizione dell'asse neutro è stata data per nota. Tuttavia è possibile determinarla attraverso semplici considerazioni di equilibrio



$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = -E \cdot \Gamma \cdot y$$

Dovranno essere rispettate le seguenti due condizioni:

- 1) l'**azione assiale è nulla**, quindi la somma delle forze normali dev'essere anch'essa nulla
- 2) Il **momento risultante delle forze normali** (espresso dal prodotto σdA) dev'essere **uguale al momento flettente applicato M_0**



$$\int \sigma_x \cdot dA = -\int E \cdot \Gamma \cdot y \cdot dA = 0$$



$$M = -M_0 \Rightarrow M_0 = -\int \sigma_x \cdot y \cdot dA$$

Espressione degli sforzi

Somma forze assiali nulla

$$\int \sigma_x \cdot dA = -\int E \cdot \Gamma \cdot y \cdot dA = 0$$

Poichè la curvatura e il modulo elastico sono costanti risulta:

$$\int y \cdot dA = 0$$

Ossia, **il momento statico della sezione rispetto all'asse neutro è nullo**

Per la definizione di baricentro, questa relazione esprime la condizione per la quale **l'asse neutro passa per il baricentro della sezione.**

Ciò consente di posizionare l'asse neutro sulla base della sola forma della sezione

Momento delle forze assiali uguale al momento esterno

$$M_0 = -\int \sigma_x \cdot y \cdot dA$$

Per la convenzione adottata $M = -M_0$ e quindi

$$M = \int \sigma_x \cdot y \cdot dA = -\Gamma \cdot E \cdot \int y^2 \cdot dA$$

O, in forma più compatta

$$M = -\Gamma \cdot E \cdot J$$

espressione nella quale

$$J = \int y^2 dA$$

È il momento di inerzia della sezione rispetto all'asse neutro z

Espressione degli sforzi

Allora la curvatura della trave può essere legata al momento flettente attraverso la relazione:

$$M = -\Gamma \cdot E \cdot J \qquad \Gamma = \frac{1}{\rho} = -\frac{M}{E \cdot J}$$

$$\delta = \frac{NL}{EA} = N \cdot \frac{L}{EA}$$

che esprime un legame di proporzionalità diretta tra la curvatura ed il momento applicato e di proporzionalità inversa tra curvatura ed il termine EJ che viene chiamato **rigidezza flessionale (legge di Eulero-Bernoulli)**

Il segno negativo rende conto della convenzione adottata sul segno della curvatura (il centro di curvatura sta dalla parte delle fibre compresse) e dei momenti (il momento flettente positivo genera una curvatura negativa e viceversa)

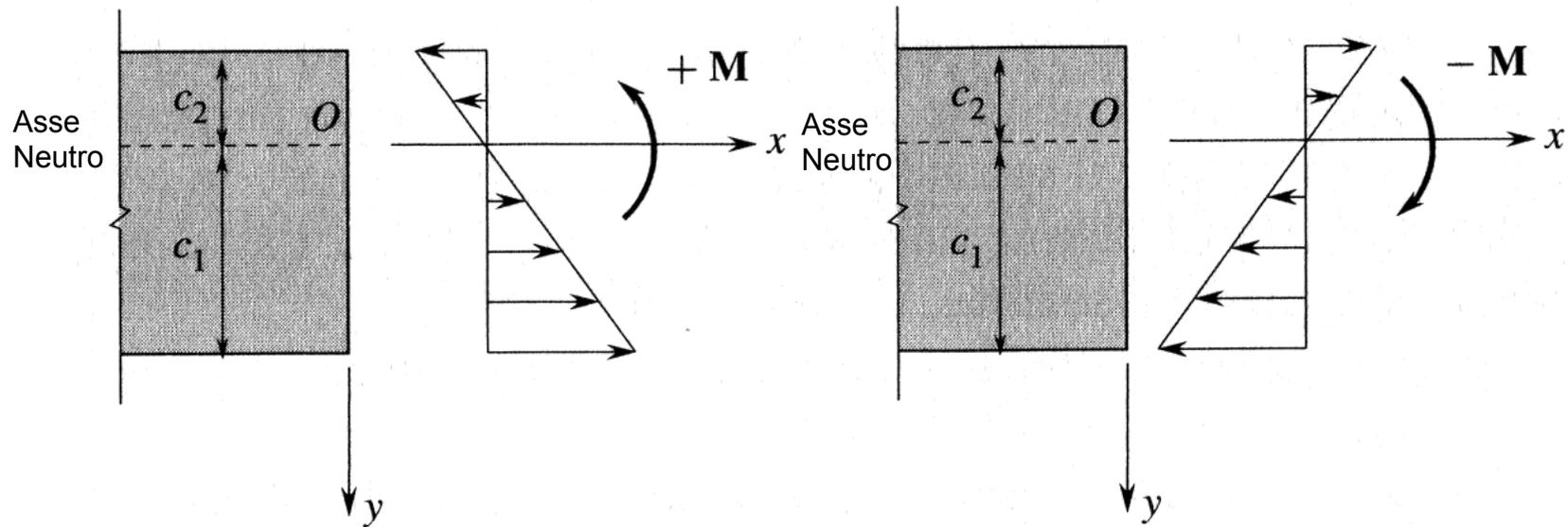
L'espressione degli sforzi si ricava

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = -E \cdot \Gamma \cdot y \qquad \text{ma essendo} \qquad \Gamma = -\frac{M}{E \cdot J}$$

si ottiene:

$$\sigma_x = \frac{M \cdot y}{J} \qquad \text{Formula di Navier}$$

Espressione degli sforzi



- La relazione di Navier mostra come gli sforzi dipendano dal momento flettente applicato, dalla distanza dall'asse neutro e dal momento di inerzia J della sezione e si **distribuiscono linearmente lungo la coordinata y** .
- Gli sforzi sui piani trasversali (aventi normali y e z) sono invece tutti nulli.
- **Il segno degli sforzi è fissato da quello del momento flettente.** Se il momento è positivo (fibre tese sotto) gli sforzi di trazione saranno dalla parte delle y positive. Se il momento è negativo, gli sforzi di trazione saranno dalla parte delle y negative

Espressione degli sforzi

Ricaviamo l'espressione degli **sforzi massimi** originati dalla presenza di momento flettente per alcune sezioni di uso comune

1) SEZIONE CIRCOLARE PIENA

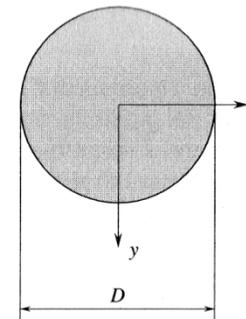
$$\sigma_x = \frac{M \cdot y}{J}$$

Il momento di inerzia vale:

$$J = \frac{\pi}{64} \cdot D^4$$

Mentre y_{\max} vale $D/2$

$$\sigma_x = \frac{M \cdot \frac{D}{2}}{\frac{\pi}{64} \cdot D^4} = \frac{64 \cdot M \cdot D}{2 \cdot \pi \cdot D^4} = \frac{32 \cdot M}{\pi \cdot D^3}$$



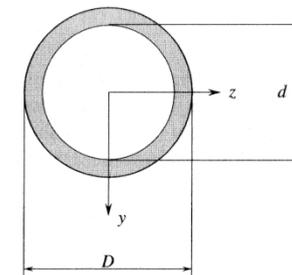
2) SEZIONE CIRCOLARE CAVA

Il momento di inerzia vale:

$$J = \frac{\pi}{64} \cdot D^4 - \frac{\pi}{64} \cdot d^4 = \frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4)$$

Mentre y_{\max} vale $D/2$

$$\sigma_x = \frac{M \cdot \frac{D}{2}}{\frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4)} = \frac{64 \cdot M \cdot D}{2 \cdot \pi \cdot (D^4 - d^4)} = \frac{32 \cdot M \cdot D}{\pi \cdot (D^4 - d^4)}$$



Espressione degli sforzi

Ricaviamo l'espressione degli sforzi massimi originati dalla presenza di momento flettente per alcune sezioni di uso comune

1) SEZIONE RETTANGOLARE PIENA

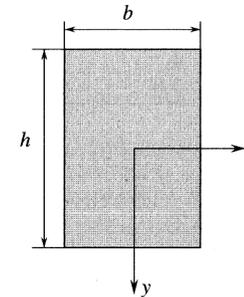
$$\sigma_x = \frac{M \cdot y}{J}$$

Il momento di inerzia vale:

$$J = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3$$

Mentre y_{\max} vale $h/2$

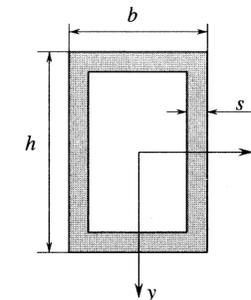
$$\sigma_x = \frac{M \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3} = \frac{12 \cdot M \cdot h}{2 \cdot b \cdot h^3} = \frac{6 \cdot M}{b \cdot h^2}$$



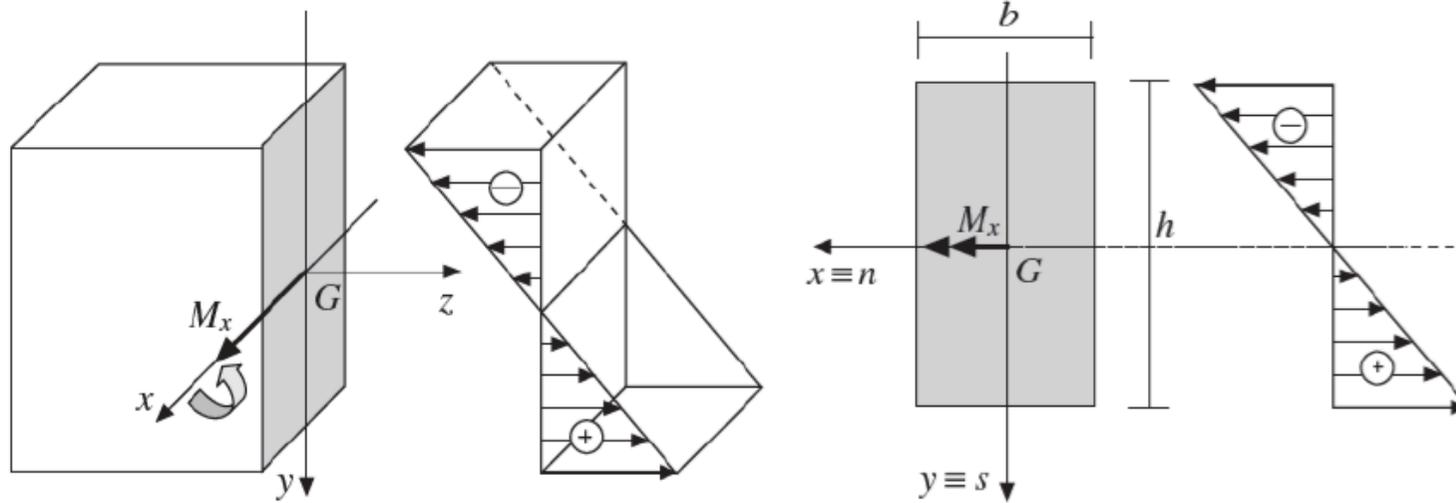
2) SEZIONE RETTANGOLARE CAVA (di spessore s)

Il momento di inerzia vale: $J = J_{\text{pieno}} - J_{\text{vuoto}} = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 - \frac{1}{12} (b - 2s) \cdot (h - 2s)^3$ y_{\max} vale $h/2$

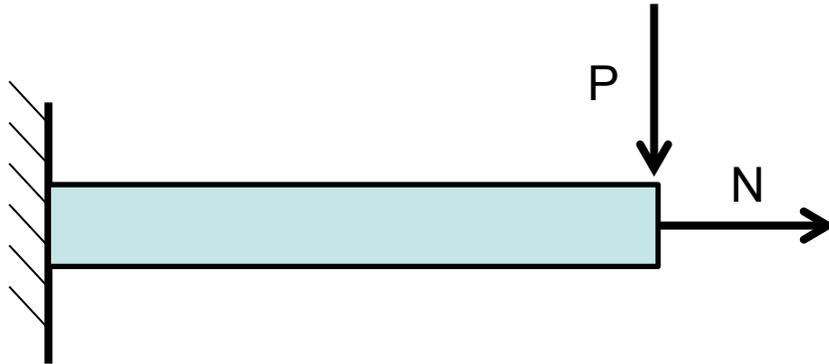
$$\sigma_{\max} = \frac{M \cdot \frac{h}{2}}{J} = \frac{6 \cdot M \cdot h}{b \cdot h^3 - (b - 2s) \cdot (h - 2s)^3}$$



Espressione degli sforzi



Flessione e azione assiale



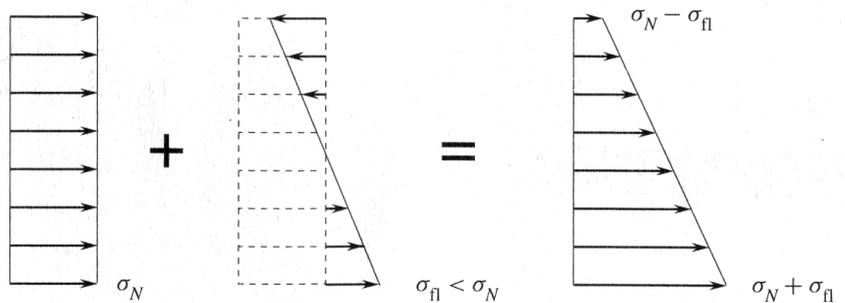
Quando una trave è **sogetta contemporaneamente ad un momento flettente M e ad un carico assiale N**, lo stato di sforzo si ottiene dalla sovrapposizione degli sforzi calcolati per le singole azioni

$$\sigma_x = \sigma_N + \sigma_M = \frac{N}{A} + \frac{M \cdot y}{J}$$

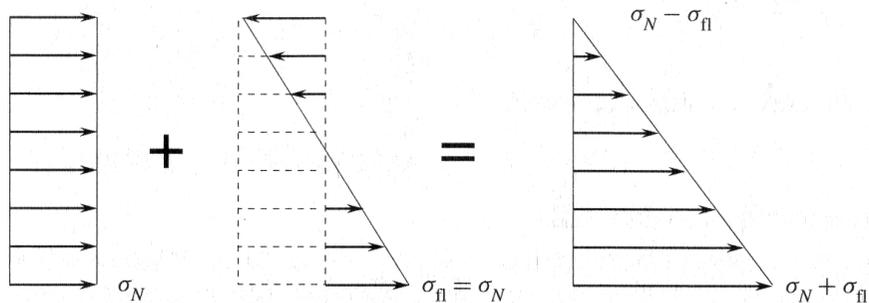
A seconda del rapporto tra le sollecitazioni massime di flessione e quelle dovute alla trazione o alla compressione, **la posizione dell'asse neutro varia rispetto al caso della sola flessione.**

Flessione e azione assiale

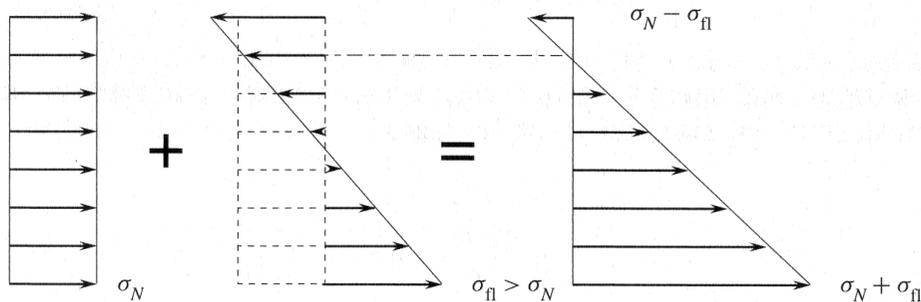
Sono possibili tre situazioni:



L'intera sezione è soggetta a sforzi dello stesso segno (asse neutro esterno alla sezione)



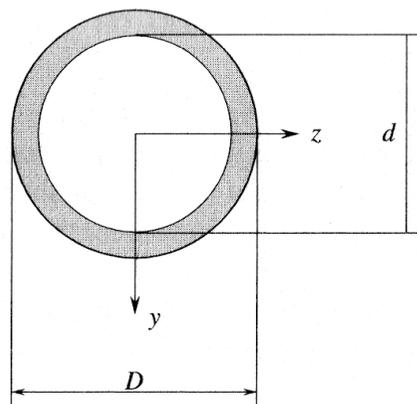
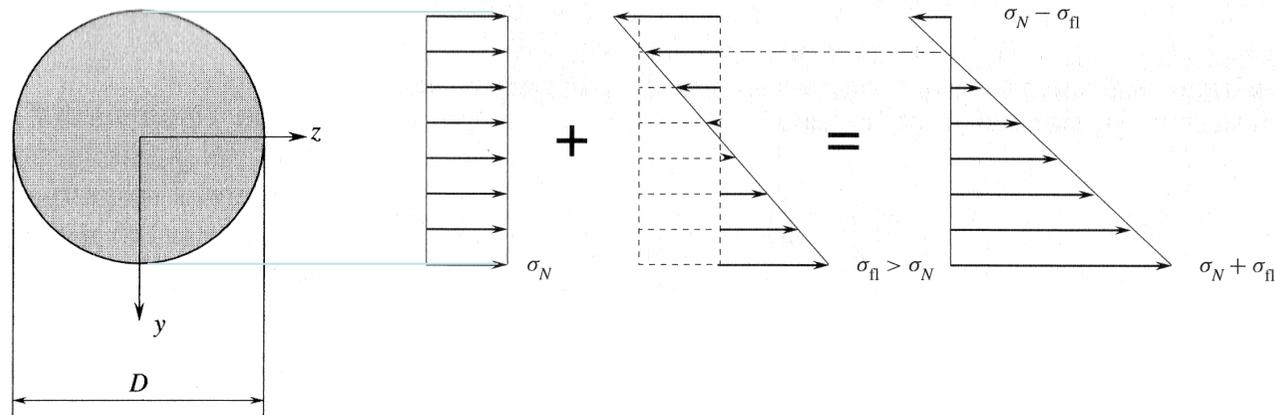
Lo sforzo si annulla ad uno degli estremi (asse neutro sul bordo esterno della sezione)



Lo sforzo cambia segno ma l'asse neutro non è baricentrico

Rappresentazione grafica

È buona norma rappresentare gli sforzi in corrispondenza di una sezione nel seguente modo:



Esempio 1

Una barra di acciaio con sezione trasversale rettangolare $20 \text{ mm} \times 62 \text{ mm}$ è soggetta a due coppie uguali e opposte agenti nel piano verticale di simmetria della barra (Figura 4.17). Determinare il valore del momento flettente M che causa lo snervamento della barra. Assumere $\sigma_Y = 252 \text{ MPa}$.

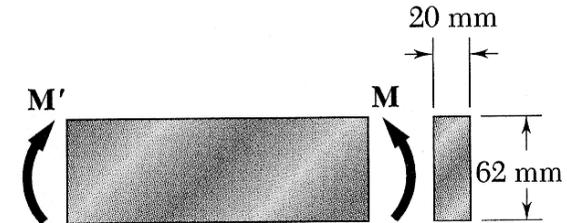


Figura 4.17

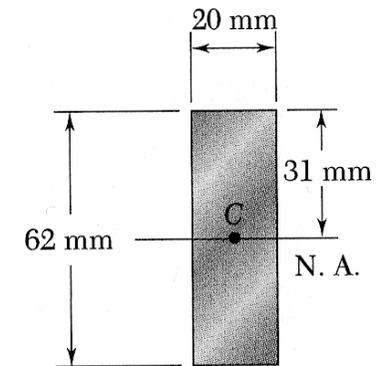
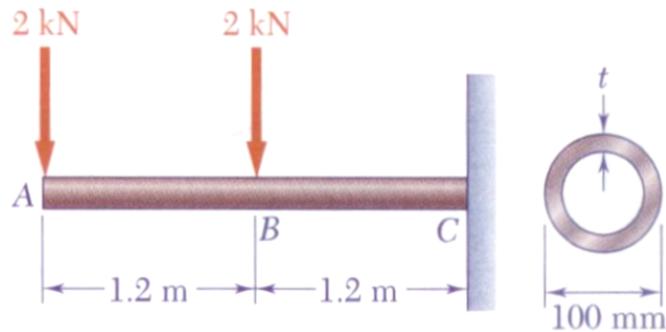


Figura 4.18

$$\sigma_x = \frac{M \cdot y}{J}$$

Esempio 2 (5.64 Beer)



Un tubo in acciaio, incastrato ad una estremità e avente diametro esterno pari a 100 mm, deve sostenere i carichi mostrati in figura.

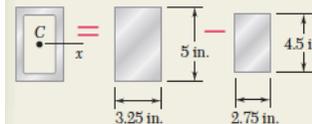
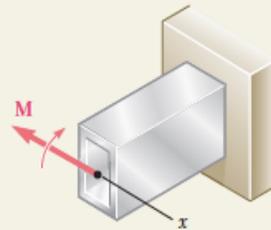
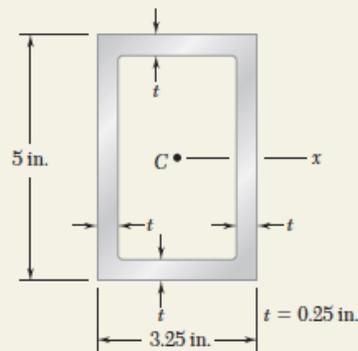
Sapendo che le serie commerciali hanno spessori t compresi tra 6 e 24 mm, con incrementi di 3 mm, e che la tensione ammissibile per l'acciaio è di 168 MPa, determinare il tubo di minimo spessore utilizzabile

Soluzione: $d=82$ mm

Esempio 3

SAMPLE PROBLEM 4.1

The rectangular tube shown is extruded from an aluminum alloy for which $\sigma_Y = 40$ ksi, $\sigma_U = 60$ ksi, and $E = 10.6 \times 10^6$ psi. Neglecting the effect of fillets, determine (a) the bending moment M for which the factor of safety will be 3.00, (b) the corresponding radius of curvature of the tube.



SOLUTION

Moment of Inertia. Considering the cross-sectional area of the tube as the difference between the two rectangles shown and recalling the formula for the centroidal moment of inertia of a rectangle, we write

$$I = \frac{1}{12}(3.25)(5)^3 - \frac{1}{12}(2.75)(4.5)^3 \quad I = 12.97 \text{ in}^4$$

Allowable Stress. For a factor of safety of 3.00 and an ultimate stress of 60 ksi, we have

$$\sigma_{\text{all}} = \frac{\sigma_U}{F.S.} = \frac{60 \text{ ksi}}{3.00} = 20 \text{ ksi}$$

Since $\sigma_{\text{all}} < \sigma_Y$, the tube remains in the elastic range and we can apply the results of Sec. 4.4.

a. Bending Moment. With $c = \frac{1}{2}(5 \text{ in.}) = 2.5 \text{ in.}$, we write

$$\sigma_{\text{all}} = \frac{Mc}{I} \quad M = \frac{I}{c}\sigma_{\text{all}} = \frac{12.97 \text{ in}^4}{2.5 \text{ in.}}(20 \text{ ksi}) \quad M = 103.8 \text{ kip} \cdot \text{in.} \quad \leftarrow$$

b. Radius of Curvature. Recalling that $E = 10.6 \times 10^6$ psi, we substitute this value and the values obtained for I and M into Eq. (4.21) and find

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{103.8 \times 10^3 \text{ lb} \cdot \text{in.}}{(10.6 \times 10^6 \text{ psi})(12.97 \text{ in}^4)} = 0.755 \times 10^{-3} \text{ in}^{-1}$$

$$\rho = 1325 \text{ in.} \quad \rho = 110.4 \text{ ft} \quad \leftarrow$$

Alternative Solution. Since we know that the maximum stress is $\sigma_{\text{all}} = 20$ ksi, we can determine the maximum strain ϵ_m and then use Eq. (4.9),

$$\epsilon_m = \frac{\sigma_{\text{all}}}{E} = \frac{20 \text{ ksi}}{10.6 \times 10^6 \text{ psi}} = 1.887 \times 10^{-3} \text{ in./in.}$$

$$\epsilon_m = \frac{c}{\rho} \quad \rho = \frac{c}{\epsilon_m} = \frac{2.5 \text{ in.}}{1.887 \times 10^{-3} \text{ in./in.}}$$

$$\rho = 1325 \text{ in.} \quad \rho = 110.4 \text{ ft} \quad \leftarrow$$

