ESERCIZI

1 ESERCIZIO SVOLTO

Argomento *Travi incastrate*

Determinare le reazioni della trave incastrata di FIGURA 4.42.

▶ Dopo aver effettuato la scomposizione lungo gli assi verticale e orizzontale:

$$F_{1y} = F_1 \cdot \text{sen}\,\alpha_1 \qquad F_{2y} = F_2 \cdot \text{sen}\,\alpha_2 \qquad F_{3y} = F_3 \cdot \text{sen}\,\alpha_3$$
$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos\alpha_1 \qquad F_{2x} = F_2 \cdot \cos\alpha_2 \qquad F_{3x} = F_3 \cdot \cos\alpha_3$$

si ha che:

$$M_i = F_1 \cdot a_1 \cdot \text{sen}\,\alpha_1 + F_2 \cdot a_2 \cdot \text{sen}\,\alpha_2 + F_3 \cdot a_3 \cdot \text{sen}\,\alpha_3$$
$$R_x = F_1 \cdot \cos\alpha_1 - F_2 \cdot \cos\alpha_2 + F_3 \cdot \cos\alpha_3$$
$$R_y = F_1 \cdot \text{sen}\,\alpha_1 + F_2 \cdot \text{sen}\,\alpha_2 + F_3 \cdot \text{sen}\,\alpha_3$$

Numericamente, se:

$$F_1 = 50\ \text{N}; \qquad F_2 = 100\ \text{N}; \qquad F_3 = 150\ \text{N}$$
$$\alpha_1 = 45°; \qquad \alpha_2 = 60°; \qquad \alpha_3 = 60°$$
$$a_1 = 1\ \text{m}; \qquad a_2 = 2{,}5\ \text{m}; \qquad a_3 = 3\ \text{m}$$

si ha:

$$M_i = 50 \cdot 1 \cdot \text{sen}\,45° + 100 \cdot 2{,}5 \cdot \text{sen}\,60° + {} + 150 \cdot 3 \cdot \text{sen}\,60° = 385{,}4\ \text{N m}$$

$$R_x = 50 \cdot \cos 45° - 100 \cdot \cos 60° + {} + 150 \cdot \cos 60° = 251{,}9\ \text{N}$$

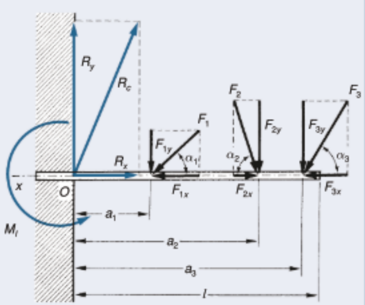
$$R_y = 50 \cdot \text{sen}\,45° + 100 \cdot \text{sen}\,60° + {} + 150 \cdot \text{sen}\,60° = 160{,}4\ \text{N}$$

ESERCIZI PROPOSTI

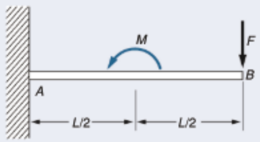
1.a ▲△△ Calcolare le reazioni di una trave incastrata, lunga l e soggetta a tre carichi verticali, uguali ed equidistanti F.

Soluzione: $R_x = 0$; $R_y = 3F$; $M_i = 2 \cdot F \cdot l$.

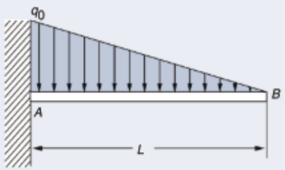
1.b ▲△△ Una trave a mensola è soggetta a una coppia di momento $M = 600$ N m e a un carico all'estremo libero



4.42



4.43



4.44

$F = 150$ N, come in FIGURA 4.43. La sua lunghezza è $L = 8$ m; determinare le reazioni all'incastro.

Soluzione: $R_x = 0$; $R_y = 150$ N; $M_i = 600$ N m (antiorario).

1.c ▲△△ Una trave incastrata AB (FIGURA 4.44) è soggetta a un carico distribuito variabile linearmente da un valore nullo in B fino a una intensità massima q_0 in A. Determinare le reazioni all'incastro.

Soluzione: $R_x = 0$; $R_y = q_0 \cdot \frac{L}{2}$; $M_i = q_0 \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{3} = q_0 \cdot \frac{L^2}{6}$.

2 ESERCIZIO SVOLTO

Argomento *Travi incastrate*

Determinare le reazioni delle due travi di FIGURA 4.45.

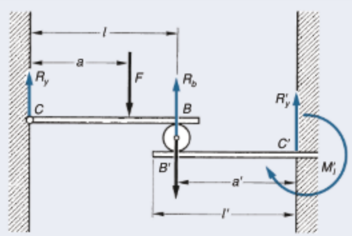
▶ La trave superiore, soggetta al carico F, può considerarsi come appoggiata in B e incernierata in C; il carico è verticale e pertanto: $R_x = 0$.

Dall'equilibrio alla rotazione intorno alla cerniera C:

$$\sum F_i \cdot b_i = F \cdot a - R_b \cdot l = 0$$

si ottiene:

$$R_b = \frac{F \cdot a}{l}$$



4.45

reazione dell'appoggio B che costituisce, altresì, carico per la trave inferiore. Esaminiamo l'equilibrio di quest'ultima:

$$\sum F_{iy} = R_b - R'_y = 0$$

da cui segue:

$$R'_y = R_b = \frac{F \cdot a}{l}$$

Inoltre dalla relazione:

$$\sum F_i \cdot b_i = -R_b \cdot a' + M'_i = 0$$

si calcola il momento d'incastro:

$$M'_i = R_b \cdot a' = \frac{F \cdot a \cdot a'}{l}$$

con verso orario e quindi positivo. Determiniamo infine la reazione verticale in C (R_y):

$$\sum F_{iy} = F - R_y - R_b = 0$$

da cui segue:

$$R_y = F - R_b$$

Con i seguenti valori numerici: $F = 2000$ N, $l = 5$ m, $a = 3$ m, $a' = 2{,}50$ m, si ottiene:

$$R'_y = R_b = \frac{2000 \cdot 3}{5} = 1200\ \text{N}$$

$$M'_y = \frac{2000 \cdot 3 \cdot 2{,}5}{5} = 3000\ \text{N} \cdot \text{m}$$

$$R_y = 2000 - 1200 = 800\ \text{N}$$

ESERCIZI PROPOSTI

2.a ▲△△ Una trave incastrata di lunghezza L è soggetta a un carico concentrato P in mezzeria, e a una coppia antioraria all'estremo libero di momento $M = P \cdot \frac{L}{4}$. Determinare le reazioni all'incastro.

Soluzione: $R_x = 0$; $R_y = P$; $M_i = P \cdot \frac{L}{4}$.

2.b ▲△△ La trave incastrata di FIGURA 4.46 è soggetta a un carico concentrato $F = 2$ kN, e a un tratto di carico distribuito $q = 1$ kN/m. Sapendo che $L = 4{,}4$ m, determinare le reazioni all'incastro.

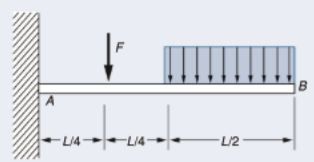
Soluzione: $R_x = 0$; $R_y = 4200$ N; $M_i = 9460$ N · m (antiorario).

2.c ▲△△ Una trave incastrata di lunghezza L è soggetta a un carico concentrato P in mezzeria, e a una coppia antioraria all'estremo libero di momento $M = P \cdot \frac{L}{4}$. Determinare le reazioni all'incastro.

Soluzione: $R_x = 0$; $R_y = P$; $M_i = P \cdot \frac{L}{4}$.

2.d ▲△△ Una trave a mensola lunga 3 m è soggetta a un carico verticale distribuito, variabile linearmente dal valore minimo di 500 N (all'estremo libero) al valore massimo (all'incastro) pari a 1000 N. Calcolare le reazioni dei vincoli.

Soluzione: $R_x = 0$; $R_y = 2250$ N; $M_i = 3000$ N · m (antiorario).



4.46

3 ESERCIZIO SVOLTO

Argomento *Travi con appoggio e cerniera*

Determinare le reazioni della trave schematizzata in FIGURA 4.47 ($F_1 = 100$ N, $F_2 = 200$ N; $\alpha = 30°$).

▶ Scomponiamo il carico F_2 secondo le direzioni orizzontale e verticale. La componente orizzontale è:

$$F_x = F_2 \cdot \cos 30° = 200 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 200 \cdot 0{,}866 \cong 173\ \text{N}$$

mentre quella verticale vale:

$$F_y = F_2 \cdot \text{sen}\,30° = 200 \cdot \frac{1}{2} = 100\ \text{N}$$

Per l'equilibrio alla rotazione intorno alla cerniera C:

$$\sum F_i \cdot b_i = F_y \cdot \frac{l}{3} + F_1 \cdot \frac{2 \cdot l}{3} - R_a \cdot l = 0$$

si ottiene:

$$R_a = \frac{F_y \cdot \frac{l}{3} + F_1 \cdot \frac{2 \cdot l}{3}}{l} = \frac{100 \cdot \frac{l}{3} + 100 \cdot \frac{2 \cdot l}{3}}{l} =$$
$$= 100 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) = 100\ \text{N}$$

Ne consegue, per la seconda equazione della statica:

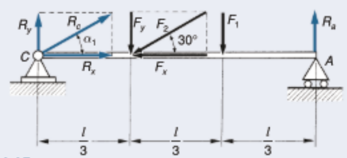
$$\sum F_y = R_y - F_y - F_1 + R_a = 0$$
$$R_y = F_y + F_1 - R_a = 100 + 100 - 100 = 100\ \text{N}$$

La reazione orizzontale R_x si ottiene sfruttando l'equilibrio alla traslazione orizzontale:

$$\sum F_x = R_x - F_x = 0 \qquad R_x = F_x \cong 173\ \text{N}$$

La cerniera C ha, pertanto, una reazione totale:

$$R_c = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{173^2 + 100^2} =$$
$$= \sqrt{30\,000 + 10\,000} = \sqrt{40\,000} = 200\ \text{N}$$



4.47

la cui direzione è individuata dall'angolo α_1 che essa forma con l'orizzontale:

$$\text{tg}\,\alpha_1 = \frac{R_y}{R_x} = \frac{100}{173} \cong 0{,}577 \quad \text{per cui } \alpha_1 = 30°$$

La reazione della cerniera risulta parallela al carico F_2 ed è uguale a questo in intensità, come del resto era facilmente prevedibile.

ESERCIZI PROPOSTI

3.a ▲△△ Risolvere l'esercizio precedente nell'ipotesi che il carico F_1 = 100 N sia inclinato di 45° nello stesso senso di F_2.

Soluzione: $R_x \cong 244$ N; $R_a \cong 80{,}6$ N; $R_y \cong 90{,}4$ N; $R_c \cong 259{,}8$ N; $\alpha_1 \cong 20°\ 20'$.

3.b ▲▲△ Calcolare le reazioni vincolari della trave di FIGURA **4.48**, disposta su un piano inclinato di 30° rispetto all'orizzontale e soggetta a un carico verticale F = 1000 N.

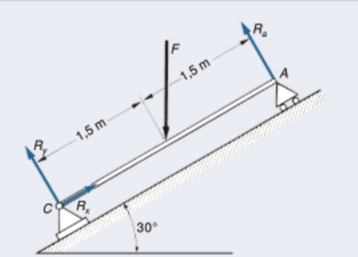
Soluzione: R_x = 500 N; $R_y \cong 433$ N; $R_a \cong 433$ N; $R_c \cong 662$ N; $\alpha_1 \cong 40°\ 53'$.

3.c ▲▲△ Calcolare le reazioni vincolari nella trave di FIGURA **4.49**, soggetta a un carico ripartito q = 100 N / m e a uno concentrato F = 250 N.

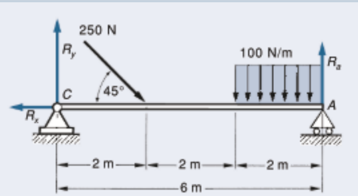
Soluzione: $R_x \cong 177$ N; $R_y \cong 151{,}2$ N; $R_a \cong 227$ N; $R_c \cong 232{,}7$ N; $\alpha_1 \cong 40°\ 30'$.

3.d ▲▲▲ Determinare la reazione sull'appoggio E prodotto dalla forza F = 200 N agente in B (FIGURA **4.50**).

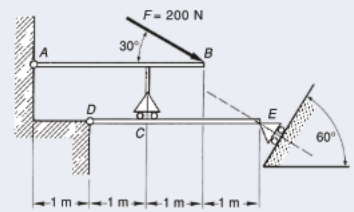
Soluzione: R_e = 100 N.



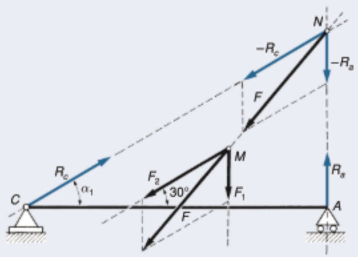
4.48



4.49



4.50



4.51

4 ESERCIZIO SVOLTO

Argomento *Procedimento grafico*

Risolvere l'esercizio 3 impiegando il procedimento grafico.

▶ Si compongono le forze agenti F_1 e F_2 trasportandole nel punto d'incontro M delle rispettive rette d'azione. La retta d'azione della risultante F determinata si incontra in N con la normale al piano dell'appoggio A (FIGURA **4.51**). Il punto N collegato al punto C determina la retta d'azione di R_c. Per ottenere l'intensità delle due reazioni R_a e R_c si trasporta F in N e si scompone nelle direzioni delle reazioni incognite. I vettori così determinati dovranno poi essere invertiti, essendo uguali e opposti alle reazioni dei vincoli. Dalla figura si rileva una sufficiente concordanza con i risultati ottenuti per via analitica.

ESERCIZI PROPOSTI

4.a ▲△△ Risolvere graficamente l'esercizio 3.b.

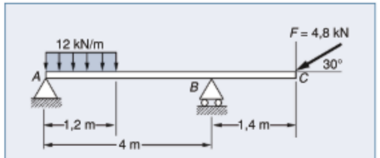
4.b ▲▲△ Risolvere graficamente l'esercizio 3.c.

5 ESERCIZIO SVOLTO

Argomento *Travi con sbalzo*

Determinare le reazioni della trave con sbalzo rappresentata in FIGURA **4.52**.

▶ Scomponendo il carico concentrato F nelle sue componenti orizzontale e verticale si ha che:



4.52

$$F_x = F \cdot \text{sen}\ 30° = 4{,}8 \cdot 0{,}866 \cong 4{,}16 \text{ kN}$$

$$F_y = F \cdot \cos 30° = 4{,}8 \cdot 0{,}5 = 2{,}4 \text{ kN}$$

Sappiamo inoltre che il carico distribuito può essere sostituito da un carico concentrato $Q = 12 \cdot 1{,}2 = 14{,}4$ kN alla distanza $\frac{1{,}2}{2} = 0{,}6$ m dalla cerniera A.

L'equilibrio alla rotazione intorno alla cerniera A ci permette di calcolare la reazione R_b:

$$\sum F_i \cdot b_i = F_y \cdot (\overline{AB} + \overline{BC}) + Q \cdot 0{,}6 - R_b \cdot 4 =$$
$$= 2{,}4 \cdot (4 + 1{,}4) + 14{,}4 \cdot 0{,}6 - R_b \cdot 4 = 0$$

da cui segue:

$$R_b = \frac{2{,}4 \cdot 5{,}4 + 14{,}4 \cdot 0{,}6}{4} = 5{,}4 \text{ kN}$$

L'equilibrio alla rotazione può anche essere ripetuto, riferendosi all'appoggio B:

$$\sum F_i \cdot b_i = F_y \cdot \overline{BC} - Q(AB - 0{,}6) + R_{ay} \cdot \overline{AB} =$$
$$= 2{,}4 \cdot 1{,}4 - 14{,}4 \cdot 3{,}4 + R_{ay} \cdot 4 = 0$$

da cui segue:

$$R_{ay} = \frac{-2{,}4 \cdot 1{,}4 + 14{,}4 \cdot 3{,}4}{4} = 11{,}4 \text{ kN}$$

Come controllo si può scrivere:

$$F_y + Q = R_b + R_{ay}$$

e sostituendo i valori numerici:

$$2{,}4 + 14{,}4 = 5{,}4 + 11{,}4 = 16{,}8 \text{ kN}$$

La reazione orizzontale nella cerniera A vale, ovviamente:

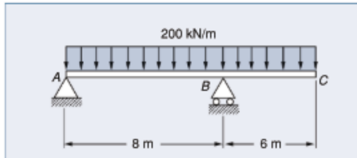
$$R_{ax} = F_x = 4{,}16 \text{ kN}$$

Componendo R_{ax} e R_{ay} si ottiene R_a:

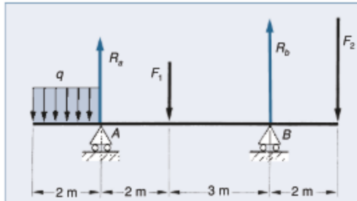
$$R_a = \sqrt{R_{ax}^2 + R_{ay}^2} = \sqrt{4{,}16^2 + 11{,}4^2} =$$
$$= \sqrt{17{,}28 + 129{,}96} = \sqrt{147{,}24} \cong 12{,}1 \text{ kN}$$

L'angolo formato da R_a con l'orizzontale è:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{R_{ay}}{R_{ax}} = \frac{11{,}4}{4{,}16} \cong 2{,}742 \qquad \text{per cui: } \alpha \cong 70°$$



4.53



4.54

ESERCIZI PROPOSTI

5.a ▲△△ Calcolare le reazioni della trave con sbalzo schematizzata in FIGURA **4.53**.

Soluzione: R_a = 350 N; R_b = 2450 N.

5.b ▲△△ Risolvere l'esercizio precedente nell'ipotesi che il carico, sempre di intensità q = 200 N / m, sia uniformemente distribuito solo nel tratto AB, mentre in C è applicata una forza di 100 N diretta verso l'alto.

Soluzione: R_a = 875 N; R_b = 625 N.

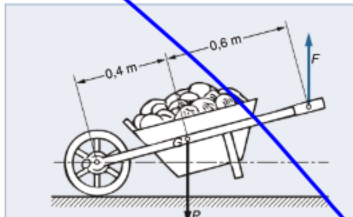
5.c ▲▲△ Determinare le reazioni dei vincoli nella trave con due sbalzi schematizzata in FIGURA **4.54**, essendo F_1 = 200 N, F_2 = 300 N, q = 150 N / m.

Soluzione: R_a = 360 N; R_b = 440 N.

6 ESERCIZIO SVOLTO

Argomento *Calcolo di carichi*

Un muratore deve trasportare una massa di sabbia di 500 N mediante una carriola (di peso 100 N), il cui schema è rappresentato in FIGURA **4.55**; si determini lo sforzo F che



4.55