

UD 3 – RICHIAMI DI MECCANICA GENERALE

Questa Unità Didattica richiama concetti di meccanica generale che, pur se già studiati in fisica, si ritiene utile ricordare in maniera sintetica, oltre che integrare con alcune considerazioni più tecniche e pratiche.

Premessa

Le azioni dinamiche che si possono esercitare sui corpi materiali per modificare il loro stato di quiete o di moto si dividono in forze e momenti:

- le FORZE (*forces*) tendono a indurre un moto di traslazione;
- i MOMENTI (*moments*) tendono a indurre un moto di rotazione.

I corpi materiali oggetto di studio della meccanica si dividono poi in:

- PUNTI MATERIALI (*material points*): sono corpi puntiformi, cioè di dimensioni trascurabili rispetto al problema che si studia (per esempio, una nave è un punto materiale quando si traccia la sua rotta su una carta nautica, ma non lo è quando attracca in banchina);
- CORPI ESTESI (*extended bodies*), cioè di dimensioni finite e non trascurabili. Sono distinti a loro volta in CORPI RIGIDI (*rigid bodies*), i quali, soggetti ad azioni dinamiche esterne, o non si deformano o si deformano senza però che la deformazione modifichi l'effetto di tali azioni dinamiche esterne, e in CORPI DEFORMABILI (*deformable bodies*), i quali, soggetti ad azioni dinamiche esterne, si deformano in misura non priva di conseguenze.

La meccanica generale si divide infine in cinematica, statica e dinamica:

- la CINEMATICA (*kinematics*) studia il moto dei corpi, senza occuparsi delle cause (forze e momenti) che lo determinano;
- la STATICA (*statics*) studia l'equilibrio statico dei corpi, cioè in che rapporto si devono trovare forze e momenti agenti su un corpo affinché questo sia e resti in equilibrio statico;
- la DINAMICA (*dynamics*) studia il legame tra le cause dinamiche del moto (forze e momenti) e le loro conseguenze cinematiche (accelerazioni lineari e angolari).

Grandezze scalari (*scalar quantities*)

Le GRANDEZZE SCALARI possono essere definite da un solo numero il quale, rispetto a un'unità di misura prefissata, ne individua il valore: sono per esempio grandezze scalari il tempo, la lunghezza, la superficie, il volume, l'energia, la potenza.

Grandezze vettoriali (*vector quantities*)

Le GRANDEZZE VETTORIALI devono invece essere definite da tre parametri e cioè:

- il MODULO o intensità, che esprime il valore numerico della grandezza;
- la DIREZIONE, che indica la retta lungo la quale agisce la grandezza;
- il VERSO, che indica da quale parte della retta d'azione agisce la grandezza.

Sono tipiche grandezze vettoriali le velocità, le accelerazioni, le forze e le pressioni.

Vettori (vectors)

Una grandezza vettoriale si rappresenta graficamente con una freccia orientata o VETTORE (*vector*) in cui (fig. 3.1):

- la lunghezza indica il modulo in base a una data scala;
- la retta, di cui la freccia è un segmento, indica la direzione;
- la punta della freccia indica il verso.



Fig. 3.1 – Vettore.

L'utilità di rappresentare graficamente una grandezza vettoriale con un vettore consiste nel fatto che molti calcoli su queste grandezze si riconducono a semplici costruzioni grafiche sui vettori.

Per indicare nelle figure e nel testo scritto che una grandezza è di tipo vettoriale, si può segnare una freccetta rivolta verso destra sopra il simbolo che la rappresenta oppure scrivere in grassetto il simbolo della grandezza: noi adotteremo questa seconda procedura.

Operazioni sui vettori (operations on vectors)

Operazioni classiche e comuni a tutte le grandezze vettoriali sono le seguenti.

- **SOMMA DI DUE VETTORI:** si usa la "regola del parallelogramma", cioè si tracciano da ogni vertice dei due vettori di partenza V_1 e V_2 le parallele all'altro vettore fino a farle incontrare per formare un parallelogramma, la cui diagonale uscente dal punto di applicazione dei vettori di partenza rappresenta il vettore somma V (fig. 3.2 a sinistra);
- **SCOMPOSIZIONE DI UN VETTORE** lungo due direzioni a e b : si individuano le componenti V_a e V_b applicando alla rovescia la regola del parallelogramma (fig. 3.2 al centro); frequente è poi la scomposizione di un vettore V lungo due assi cartesiani ortogonali (fig. 3.2 a destra).

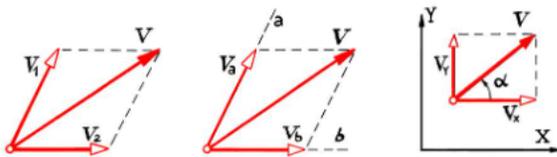


Fig. 3.2 – Regola del parallelogramma, scomposizione di un vettore lungo due direzioni, scomposizione di un vettore lungo i due assi cartesiani.

Analiticamente si ha poi che, detto α l'angolo compreso fra l'orizzontale e il vettore, risulta:

$$V_x = V \cos \alpha \quad V_y = V \sin \alpha$$

Viceversa, se sono note le componenti cartesiane V_x e V_y , il modulo del vettore V si calcola con il teorema di Pitagora e si risale all'angolo α tramite la sua arcotangente:

$$V = \sqrt{V_y^2 + V_x^2} \quad \alpha = \arctg \frac{V_y}{V_x}$$

Premesso questo, vediamo i richiami di CINEMATICA, STATICA e DINAMICA.

CINEMATICA (kynematics)

La cinematica studia le leggi del moto dei corpi e le due grandezze tipiche che lo caratterizzano, cioè i vettori velocità e accelerazione. Dopo aver detto qualcosa su queste due grandezze vettoriali, verranno descritte le leggi dei principali tipi di moti del punto materiale e si darà infine un accenno alla cinematica dei corpi rigidi.

Traiettoria di un moto (trajectory of a motion)

Nel caso di un punto materiale P in movimento, la TRAIETTORIA del suo moto è la linea continua formata dalla successione delle posizioni occupate da questo punto materiale nel tempo.

Nei moti piani la traiettoria è contenuta in un piano e in genere è una linea curva (fig. 3.3) la cui equazione sul piano cartesiano sarà del tipo $y = f(x)$.

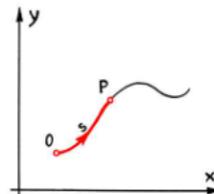


Fig. 3.3 – Traiettoria di un moto piano.

Velocità (speed, velocity)

La velocità fornisce informazioni sulla relazione esistente tra spazio percorso e tempo impiegato per percorrerlo, quindi è il rapporto tra spazio percorso e tempo:

$$\text{velocità} = \frac{\text{spazio percorso}}{\text{tempo impiegato}}$$

- Se un punto materiale percorre una certa distanza Δs in un dato intervallo di tempo Δt , il rapporto tra lo spazio percorso e tale intervallo di tempo è la cosiddetta VELOCITÀ MEDIA v_m :

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Ma non è detto che il punto mobile abbia mai avuto questa velocità durante tale intervallo di tempo: per esempio, se un'automobile percorre 90 [km] in un'ora e altri 60 nell'ora successiva, la velocità media nelle 2 ore vale $150 : 2 = 75$ [km/h], anche se in realtà l'automobile non è mai andata a questa velocità.

- Per avere una informazione un po' più precisa sulla velocità alla quale è avvenuto un moto, si può pensare di dividere l'intero spazio percorso Δs in tante frazioni:

$$\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3, \dots, \Delta s_n$$

e prendere nota dei singoli intervalli di tempo impiegati:

$$\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \dots, \Delta t_n,$$

dopo di che calcolare le corrispondenti velocità medie:

$$v_{m1} = \frac{\Delta s_1}{\Delta t_1} \quad v_{m2} = \frac{\Delta s_2}{\Delta t_2} \quad v_{m3} = \frac{\Delta s_3}{\Delta t_3} \dots \quad v_{mn} = \frac{\Delta s_n}{\Delta t_n} \quad \text{e così via.}$$

- Per estensione, presi tanti intervalli di spazio piccolissimi o infinitesimi ds (leggi "de-esse") e presi gli intervalli corrispondenti di tempo dt (leggi "de-ti"), anch'essi infinitesimi, si calcola un numero elevatissimo di valori di velocità, detta VELOCITÀ Istantanea:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Questo modo di calcolare la velocità istantanea è ovviamente noioso e l'ideale sarebbe poter conoscere la legge matematica $v = v(t)$ con cui la velocità istantanea varia con il tempo: in tal modo, grazie alla matematica, si potrebbero fare molti calcoli con poca fatica e avere tutte le informazioni possibili sul moto stesso.

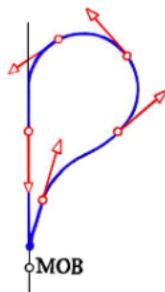
- Essendo la velocità una grandezza vettoriale, è rappresentabile con un VETTORE, cioè una freccia orientata in cui:

- la lunghezza indica il modulo della velocità, rispetto a una scala che può essere riportata in un angolo della figura, per esempio: $1 \text{ [mm]} = 5 \text{ [m/s]}$;
- la retta a cui la freccia appartiene indica la direzione;
- la punta della freccia indica il verso.

- IL VETTORE VELOCITÀ È SEMPRE TANGENTE ALLA TRAIETTORIA

Tanto per fare un esempio suggestivo e importante, la figura 3.4 rappresenta la rotta che effettua una nave per compiere la manovra di Williamson (*Williamson turn*), una delle procedure per il recupero di un uomo caduto in mare (*man overboard*, MOB). La figura mostra che in ogni punto della rotta il vettore che rappresenta graficamente la velocità della nave è stato disegnato tangente alla traiettoria di navigazione.

Fig. 3.4 – Manovra di Williamson.



Accelerazione (acceleration)

L'accelerazione è il rapporto tra una variazione di velocità e l'intervallo di tempo in cui essa è avvenuta, quindi esprime come varia la velocità col tempo e si esprime in $[m/s^2]$. Anche qui si distingue tra:

ACCELERAZIONE MEDIA

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

ACCELERAZIONE Istantanea

$$a = \frac{dv}{dt}$$

- Poiché una variazione si calcola sempre come valore finale meno valore iniziale, risulta:

se	$a > 0$	v cresce	→	moto accelerato
se	$a < 0$	v diminuisce	→	moto rallentato
se	$a = 0$	v costante	→	moto uniforme

Fra tutti i vari tipi di moti di un punto materiale, ne vediamo due molto semplici e importanti.

Moto rettilineo uniforme (uniform rectilinear motion)

Questo moto (fig. 3.5) è detto rettilineo perché la traiettoria è una linea retta, uniforme perché avviene a velocità costante in modulo, direzione e verso, quindi con accelerazione $a = 0$.

Lo spazio percorso s è direttamente proporzionale al tempo t e le relazioni tra velocità, spazio e tempo sono:

$$v = \frac{s}{t}$$

$$s = v t$$

$$t = \frac{s}{v}$$

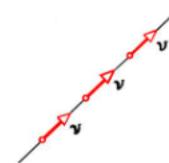


Figura 3.5 – Moto rettilineo uniforme.



Figura 3.6 – Portacontaineri in navigazione.

È il moto con cui avanza un mezzo terrestre, aereo o navale propulso da una potenza meccanica uguale e contraria a quella che, per cause di attrito, si oppone al suo avanzamento (fig. 3.6). Come vedremo, è pure il moto di traslazione con cui procede per inerzia una massa non soggetta a forze esterne.

Moto circolare uniforme (uniform circular motion)

Questo moto è detto circolare perché la sua traiettoria è una circonferenza, uniforme perché avviene con velocità costante in modulo e verso (fig. 3.7).

- Si osservi che la velocità cambia continuamente direzione, quindi il vettore varia, fatto che comporterà, come vedremo tra breve, la nascita di un'accelerazione centripeta.
- La VELOCITÀ LINEARE v del punto materiale P che si muove lungo la circonferenza prende anche il nome di VELOCITÀ PERIFERICA.

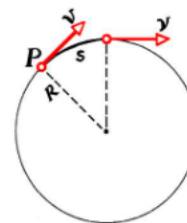


Figura 3.7 – Moto circolare uniforme.

- Il moto circolare uniforme è il tipico moto di un punto che appartiene a un organo meccanico (asse, ruota dentata ecc) rotante in condizioni di regime o, volendo fare un esempio banale, della punta delle lancette di un orologio analogico. Ovviamente è anche il moto di un punto P che si trova sulla superficie terrestre (fig. 3.8).

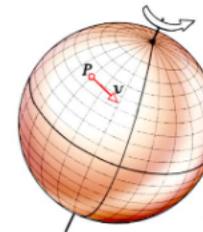


Figura 3.8 – Moto circolare uniforme di un punto della superficie terrestre.

- Essendo la velocità lineare v [m/s] costante in modulo, l'arco di circonferenza s [m] che viene percorso cresce linearmente col tempo [s] e valgono le seguenti relazioni:

$$v = \frac{s}{t}$$

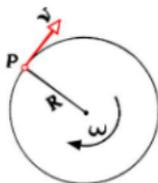
$$s = v t$$

$$t = \frac{s}{v}$$

- In tutti i moti circolari, indicando con raggio vettore R la distanza del punto P dal centro della circonferenza (fig. 3.9), è utile introdurre il concetto di VELOCITÀ ANGOLARE ω , rapporto tra l'angolo φ spazzato dal raggio vettore R e il tempo t :

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \text{costante}$$

Figura 3.9 – Velocità angolare.



- Anche la velocità angolare ω è una grandezza vettoriale e si rappresenta con una freccetta che indica il senso di rotazione del moto.
- Poiché l'angolo φ va espresso in radianti, ω si misura in [rad/s]; dato però che, a essere precisi, i radianti sono numeri puri, spesso si trova la scrittura [(rad)/s]. La comodità di misurare gli angoli in radianti deriva dal fatto che la lunghezza s di un arco di circonferenza è il prodotto del raggio R per l'angolo al centro φ espresso appunto in radianti:

$$s = \varphi R$$

- Se il regime rotazionale è espresso dal numero di giri al minuto n [giri/min], risulta:

$$\omega = 2\pi \frac{n}{60}$$

- Il legame tra la velocità lineare v del punto materiale P e la velocità angolare ω è:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{\varphi R}{t} = \omega R$$

- Si potrebbe poi dimostrare che il punto materiale che si muove di moto circolare uniforme con velocità periferica v e con velocità angolare ω è soggetto a una accelerazione rivolta verso il centro e detta pertanto centripeta il cui modulo vale (fig. 3.10):

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

ovvero:

$$a_c = \omega^2 R$$

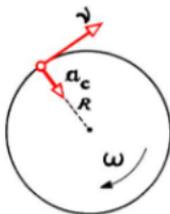


Figura 3.10 – Accelerazione centripeta.

STATICA (statics)

Sappiamo che le forze possono essere di gravità (o pesi), di pressione, di deformazione elastica, centripete, centrifughe ecc. Se poi usciamo dalla meccanica, si parla di forze elettriche, magnetiche ecc. Nei presenti richiami di statica noi parleremo in prevalenza di forze-peso, perché più comuni e facili da comprendere.

Operazioni sulle forze (operations on forces)

Dato che le forze sono grandezze vettoriali, aggiungiamo alcune procedure di calcolo vettoriale specificatamente utili quando si ha a che fare con delle forze.

SOMMA DI DUE FORZE APPLICATE IN UN PUNTO

Se due forze F_1 e F_2 agiscono su un unico punto P, la forza risultante $R = F_1 + F_2$ si ricava graficamente con il già visto metodo del parallelogramma di lati F_1 e F_2 . Come casi particolari:

- se F_1 e F_2 sono parallele e di uguale verso, la risultante R ha la direzione e il verso di F_1 e F_2 e per modulo la somma dei loro moduli (fig. 3.19);

Figura 3.19 – Somma di forze parallele e di egual verso.



- se F_1 e F_2 sono parallele e di verso opposto, la risultante R ha la medesima direzione, il verso della forza di modulo maggiore e per modulo la differenza dei loro moduli (fig. 3.20).

Figura 3.20 – Somma di forze parallele e di verso opposto.



SOMMA DI PIÙ FORZE APPLICATE IN UN PUNTO

La risultante R di più forze si può calcolare con la regola del parallelogramma per tappe successive, ma è più veloce il metodo della spezzata poligonale: dopo il vertice di F_1 si riporta una forza uguale a F_2 a essa parallela. La medesima costruzione si fa con F_3 riportata dopo il vertice di F_2 e così di seguito; congiungendo il punto di applicazione di tutte le forze con il vertice dell'ultima forza riportata si ottiene la risultante R (fig. 3.21).

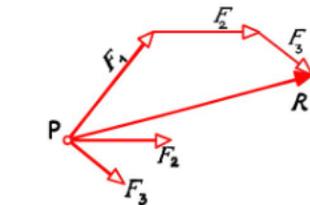
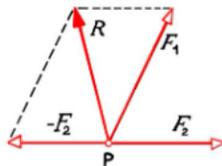


Figura 3.21 – Metodo della spezzata poligonale.

DIFFERENZA DI DUE FORZE APPLICATE IN UN PUNTO

Per calcolare la differenza $R = F_1 - F_2$ si ricorre al semplice artificio di sommare F_1 a $-F_2$: si costruisce allora $-F_2$ e poi si applica la nota regola del parallelogramma alle forze F_1 e $-F_2$ (fig. 3.22).

Figura 3.22 – Differenza di due forze.



PUNTO DI APPLICAZIONE DI UNA FORZA

Se una forza è applicata in un punto P (fig. 3.23), è indifferente segnlarla a partire da P (come se tirasse) o con il vertice in P (come se spingesse).

Figura 3.23 – Rappresentazioni equivalenti di una forza applicata in un punto.



Così pure, se una forza è applicata a un corpo rigido, il punto di applicazione si può scegliere su un punto qualsiasi della sua retta d'azione senza che l'effetto della forza cambi (fig. 3.24).

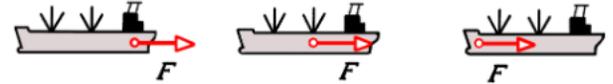


Figura 3.24 – Punti di applicazione di una forza applicata a un corpo rigido.

RISULTANTE DI UN SISTEMA DI FORZE COMPLANARI

Se più forze agiscono su un corpo rigido (fig. 3.25), la risultante si determina con un procedimento che prende il nome di "metodo del poligono funicolare":

- accanto alla figura si tracciano i segmenti consecutivi 0-1, 1-2, 2-3 e 3-4, paralleli alle forze date e di uguale lunghezza, in modo da formare una spezzata poligonale: la congiungente 0-4 è parallela alla retta d'azione della risultante e ne fornisce modulo e verso; per individuare poi la retta d'azione della risultante si opera così:
- da un polo di proiezione P scelto liberamente si tracciano le congiungenti P-0, P-1, P-2, P-3 e P-4;
- da un qualunque punto A a sinistra del sistema di forze, si traccia una parallela alla P-0 fino a incontrare la retta d'azione della prima forza, si prosegue con una parallela alla P-1 fino a incontrare la retta d'azione della seconda e così via, fino a uscir fuori sulla destra con una parallela alla P-4;
- si prolungano le due parallele estreme ora costruite e la loro intersezione K individua la retta d'azione della risultante, che ha modulo 0-4 e punto di applicazione qualunque.

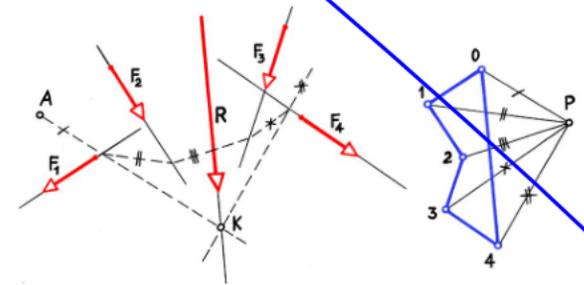
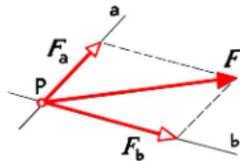


Figura 3.25 – Poligono funicolare.

SCOMPOSIZIONE DI UNA FORZA IN DUE DIREZIONI

Per fare ciò si ricorre, come abbiamo già visto per il vettore velocità, alla regola del parallelogramma applicata alla rovescia: note le direzioni a e b passanti per il punto P di applicazione della forza e tracciate le parallele a queste passanti per tale punto, risulta un parallelogramma che ha per lati le componenti F_a e F_b (fig. 3.26).

Figura 3.26 – Scomposizione di una forza lungo due direzioni.



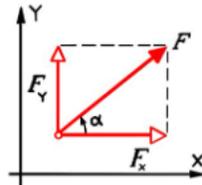
Se poi le direzioni volute sono i due assi cartesiani, i moduli delle componenti hanno le seguenti espressioni (fig. 3.27):

$$F_x = F \cos \alpha \quad F_y = F \sin \alpha$$

Note invece le componenti cartesiane F_x e F_y , il modulo di F e l'angolo α valgono:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad \alpha = \arctg \frac{F_y}{F_x}$$

Figura 3.27 – Scomposizione di una forza lungo i due assi cartesiani.



Momento di una forza (*moment of a force*)

Ricordiamo che si definisce momento un'azione meccanica in grado di indurre una rotazione. Frequente è il caso che un momento venga creato da una forza, e vale quanto segue.

Se un corpo rigido piano è libero di ruotare intorno a un polo P e gli si applica una forza F la cui retta d'azione non passi per P , si origina un MOMENTO M della forza F rispetto al polo P e che tende a far ruotare il corpo intorno a P .

Il momento è un vettore che ha per modulo M il prodotto del modulo F della forza per la distanza b (braccio) tra la retta d'azione della forza e il polo (fig. 3.28):

$$M = F b$$

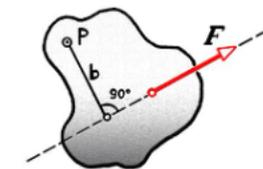
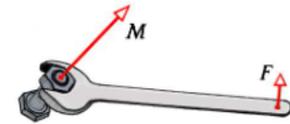


Figura 3.28 – Momento di una forza.

- Il momento si misura in newton × metro [Nm], unità di misura senza nome specifico.
- Nel gergo tecnico il momento di una forza è spesso detto coppia, termine francamente infelice perché crea confusione con il concetto di coppia di forze, di cui si parlerà poco più avanti: il termine coppia è però frequentemente usato e dobbiamo avere pazienza.

- Il fatto che un momento sia il prodotto di una forza per una distanza fa comprendere come si possa esercitare un'azione rotante anche di notevole intensità pur applicando una forza modesta ma facendola agire tramite un lungo braccio d'azione (fig. 3.29). Quando invece si voglia sempre esercitare un forte momento ma non sia possibile agire con lunghi bracci, si dovrà necessariamente ricorrere a forze molto intense.

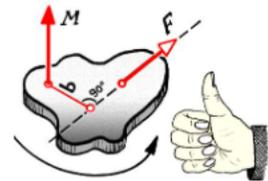
Figura 3.29 – Momento di notevole intensità.



Il concetto di momento di una forza è pertanto utile per capire il meccanismo di azione di svariati dispositivi e impianti, dalle semplici chiavi inglesi fino agli agghiacci idraulici delle timonerie. Fondamentale è poi la sua utilità nel calcolo degli sbandamenti causati alla nave da cause esterne o interne allo scafo.

- La direzione del momento si assume perpendicolare al piano che contiene polo e retta d'azione della forza, mentre per il verso si usa la "regola della mano destra" (fig. 3.30).

Figura 3.30 – Regola della mano destra.



- Per le figure piane (cioè con polo e retta d'azione della forza nel piano del foglio), pensando il momento come una freccia vista assialmente (fig. 3.31), si usano i simboli \odot quando il momento esce dal foglio e \otimes quando vi entra. Per dare poi il senso della rotazione che il momento tende a creare, si può segnare sul foglio una freccia arcuata in senso orario o in senso antiorario.

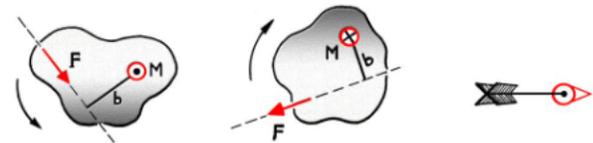


Figura 3.31 – Rappresentazione grafica del senso di rotazione di un momento.

Indicare i momenti come orari o antiorari è utile per assegnare loro un segno quando si fanno esercizi numerici: in tal caso si deve stabilire una convenzione (per esempio quella di considerare positivi i momenti orari), fatto che si specifica disegnando a lato della figura una freccia arcuata (oraria o antioraria) associata al segno "più" o al segno "meno".

- Concludiamo con una osservazione importante. Se più forze F_1, F_2, \dots, F_n aventi come risultante R agiscono su un corpo rigido e P è un punto scelto come polo, detto b il braccio del risultante rispetto a P , il MOMENTO DEL RISULTANTE vale chiaramente (fig. 3.32):

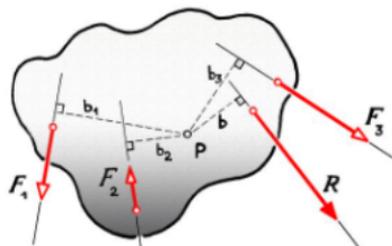


Figura 3.32 – Corpo rigido rotante soggetto a più forze.

$$M = R b$$

Indicati poi con $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ in bracci di queste forze rispetto a P , i loro momenti sono $F_1 b_1, F_2 b_2, \dots, F_n b_n$ e, tenendo conto dei loro segni (stabiliti in base a una convenzione arbitraria), originano un loro MOMENTO RISULTANTE dato da:

$$M = \sum F_i b_i$$

In un caso come questo si rivela importantissimo il TEOREMA DI VARIGNON (1688), il quale afferma che "IL MOMENTO DEL RISULTANTE È UGUALE AL RISULTANTE DEI MOMENTI":

$$R b = \sum F_i b_i$$

Non diamo la dimostrazione di questo teorema, che sembra quasi un gioco di parole ma che in realtà è fondamentale in meccanica e soprattutto in teoria della nave.

Coppia di forze e suo momento (couple of forces and its moment)

Si definisce COPPIA DI FORZE l'insieme di due forze F aventi uguale modulo, rette d'azione parallele e versi opposti (fig. 3.33).

Se queste due forze agiscono su un corpo rigido, indicata con d la distanza tra le due rette d'azione, l'effetto congiunto di queste due forze crea un momento il cui modulo M vale:

$$M = F d$$

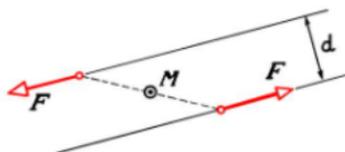


Figura 3.33 – Momento di una coppia di forze.

- Un caso importante di momento di una coppia di forze si incontra nello studio dell'equilibrio di una nave soggetta a sbandamento trasversale, in cui le due forze uguali e contrarie sono:
 - il peso stesso della nave (detto dislocamento, *displacement*);
 - la spinta idrostatica (*buoyance*) esercitata dall'acqua in cui la nave galleggia.

Come si vedrà studiando teoria della nave, finché l'angolo di sbandamento non supera certi valori pericolosi, questa coppia di forza origina un momento raddrizzante detto MOMENTO DI STABILITÀ.