

Statica del corpo rigido

Condizioni di equilibrio

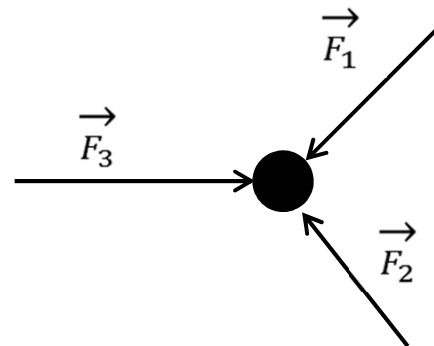
Calcolo delle Reazioni Vincolari

**Obiettivo della lezione:** apprendere le equazioni cardinali della statica e applicarle al calcolo delle reazioni vincolari. Calcolare le reazioni vincolari per strutture semplici ed articolate

# Equilibrio del punto materiale

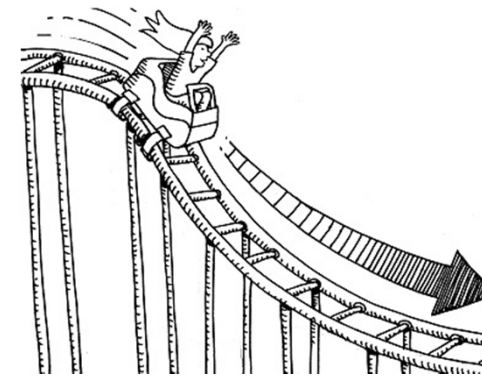
- Un corpo soggetto all'azione di forze esterne tipicamente è costretto a muoversi di moto accelerato
- Tuttavia in certe situazioni, esistono **particolari rapporti tra le forze applicate** tali che il moto venga a mancare del tutto o sia di tipo rettilineo uniforme
- Queste condizioni vengono dette «di equilibrio statico»
- Nel caso del punto materiale sottoposto ad un sistema di forze, la condizione di equilibrio si esprime come segue:

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{F}_x = 0 \\ \sum \vec{F}_y = 0 \\ \sum \vec{F}_z = 0 \end{array} \right.$$



$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0$$
$$F_{1y} + F_{2y} = 0$$

Nel piano



# Equilibrio del corpo rigido

- **Nel caso del corpo rigido** le relazioni di equilibrio vedono coinvolte non solo le forze ma anche i momenti generati dalle forze stesse
- Infatti un corpo rigido si trova in **equilibrio quando sono verificate due relazioni vettoriali** indipendenti

1) La somma vettoriale di **tutte le forze** applicate al corpo è nulla

$$\sum \vec{F} = 0$$

2) La somma vettoriale **dei momenti applicati al corpo**, calcolati rispetto ad un punto qualsiasi, è nulla

$$\sum \vec{M}_o = 0$$

- Queste vengono definite «equazioni cardinali della statica»

# Equilibrio del corpo rigido

Le due equazioni vettoriali corrispondono a due terne di equazioni scalari (nello spazio) e a tre equazioni scalari nel piano e precisamente:

**Nello spazio**

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{F}_x = 0 \\ \sum \vec{F}_y = 0 \\ \sum \vec{F}_z = 0 \end{array} \right. \quad \sum \vec{M}_O = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{M}_{Ox} = 0 \\ \sum \vec{M}_{Oy} = 0 \\ \sum \vec{M}_{Oz} = 0 \end{array} \right.$$

**Nel piano i due sistemi si riducono a:**

$$\sum \vec{F}_x = 0 \quad \sum \vec{F}_y = 0 \quad \sum \vec{M}_{Oz} = 0$$

Osserviamo che **il numero di equazioni per l'equilibrio corrisponde al numero di gradi di libertà da bloccare** affinché si ottenga l'equilibrio.

# Reazioni vincolari

- Come abbiamo visto, **i corpi rigidi interagiscono con il riferimento fisso tramite i vincoli**, dei quali abbiamo precedentemente analizzato il comportamento cinematico (ossia i movimenti consentiti ed impediti)
- Tuttavia, in presenza di forze esterne, i vincoli esercitano forze che, per il principio di Azione e Reazione, sono uguali alle forze applicate in modulo e direzione ma di segno opposto

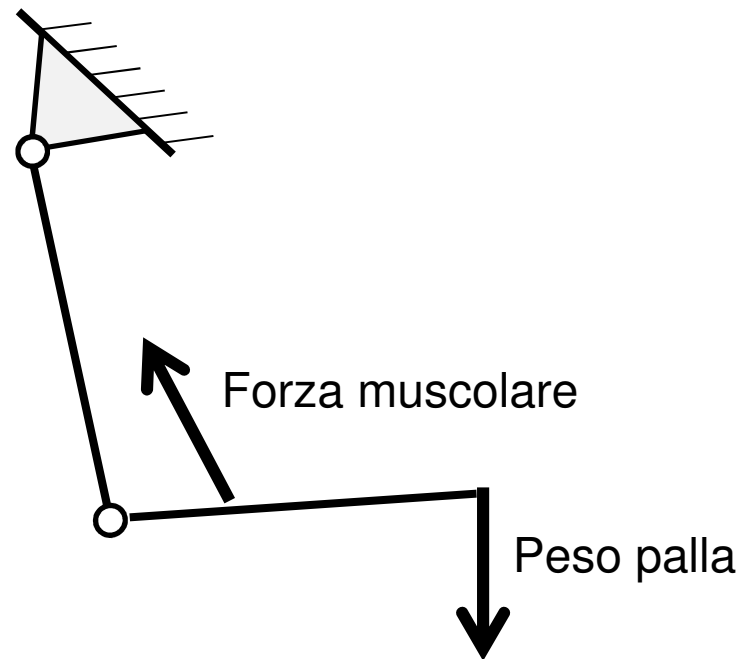
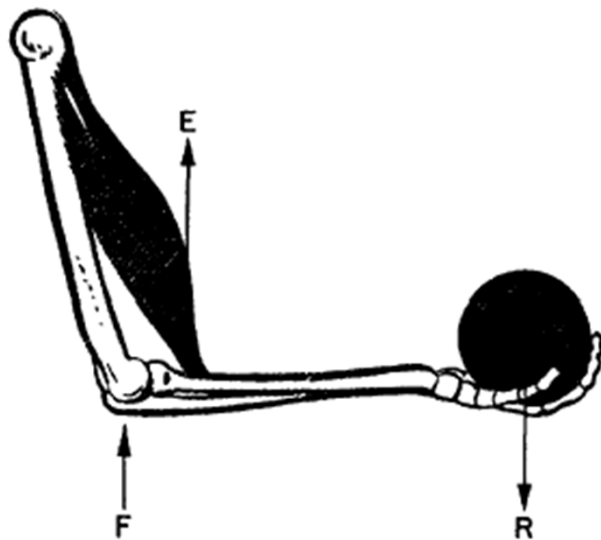
## Tali forze vengono chiamate «reazioni vincolari»

- In particolare, le reazioni vincolari agenti sul corpo saranno **uguali e contrarie alle azioni che il vincolo applica sul mondo esterno** (nel caso di vincolo esterno) o sull'asta adiacente (nel caso di vincolo interno).
- Dunque **le reazioni vincolari, unitamente alle forze esterne applicate, costituiscono un sistema di forze per le quali deve essere garantita la condizione di equilibrio** secondo le leggi della statica dei corpi rigidi.

# Reazioni vincolari

Nelle applicazioni pratiche, alcuni dei carichi agenti sulla struttura (forze e momenti) sono noti e si definiscono “carichi attivi” o “esterni”.

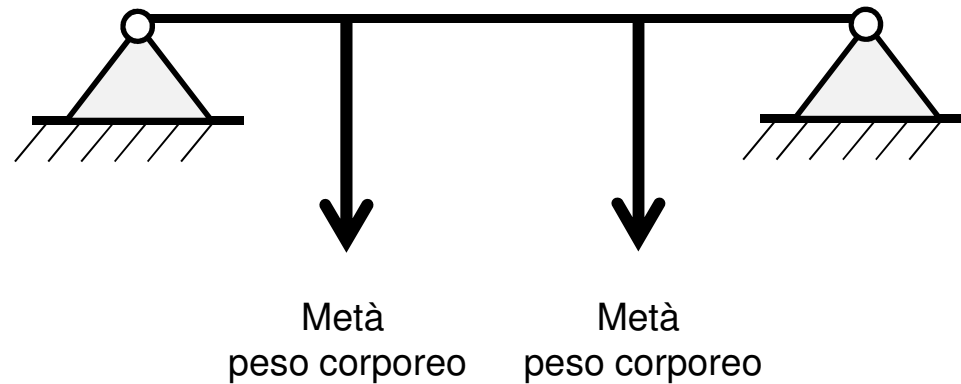
Altre forze, in particolare quelle esercitate dai vincoli che collegano la struttura in studio al mondo esterno, sono incognite e devono essere determinati analiticamente affinché sia verificato l’equilibrio della struttura. **Queste sono le reazioni vincolari**



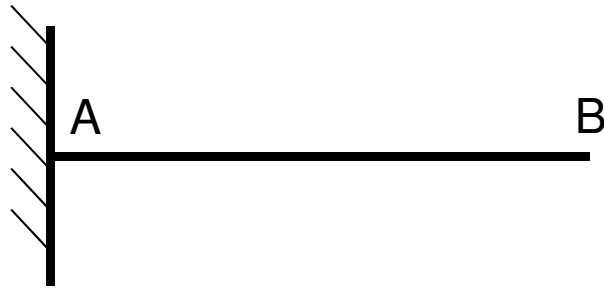
# Reazioni vincolari

Nelle applicazioni pratiche, alcuni dei carichi agenti sulla struttura (forze e momenti) sono noti e si definiscono “carichi attivi” o “esterni”.

Altri, in particolare quelli esercitati dai vincoli che collegano la struttura in studio al mondo esterno, sono incogniti e devono essere determinati analiticamente affinché sia verificato l'equilibrio della struttura. **Queste sono le reazioni vincolari**

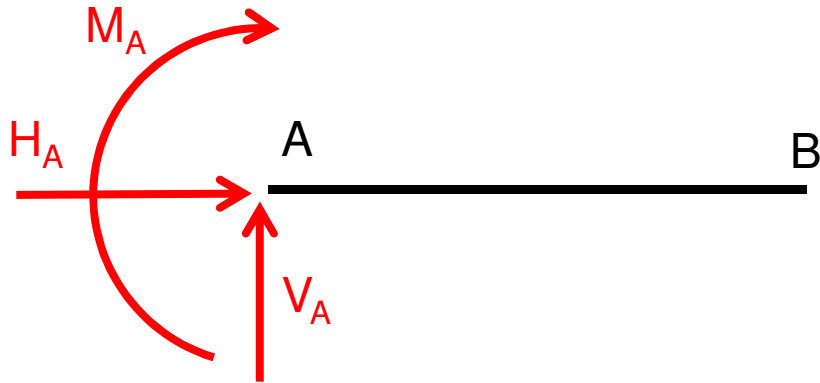


# Reazioni esercitate dai vincoli semplici



## Incastro

Questo vincolo toglie tutte le tre libertà di movimento del corpo rigido, quindi è un vincolo triplo (3 GdV).



## Le reazioni vincolari

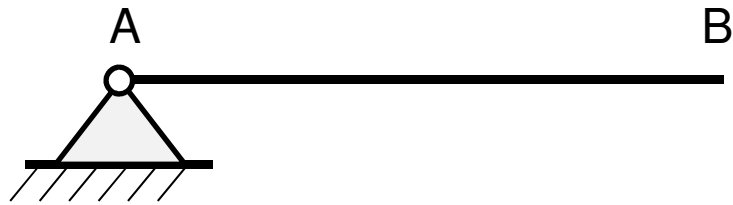
Le reazioni vincolari sono costituite da due forze in direzione orizzontale e verticale ( $H_A$  e  $V_A$ ) e da un momento ( $M_A$ ).

- E' importante il verso delle reazioni vincolari ?
- Come deve essere determinato?

**Inizialmente non dobbiamo preoccuparcene.** In generale si procede ad ipotizzare un verso (casualmente o con criterio) che sarà successivamente confermato (o smentito) dal risultato delle equazioni di equilibrio

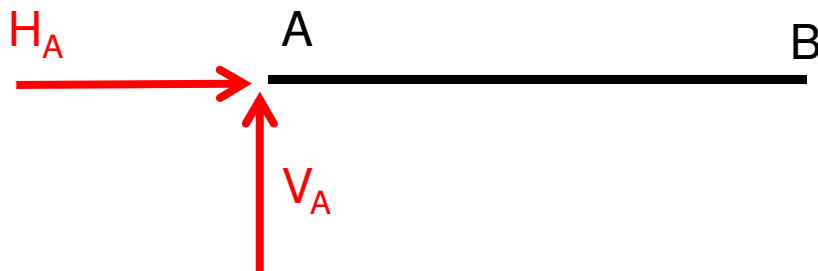


# Reazioni esercitate dai vincoli semplici



## Cerniera

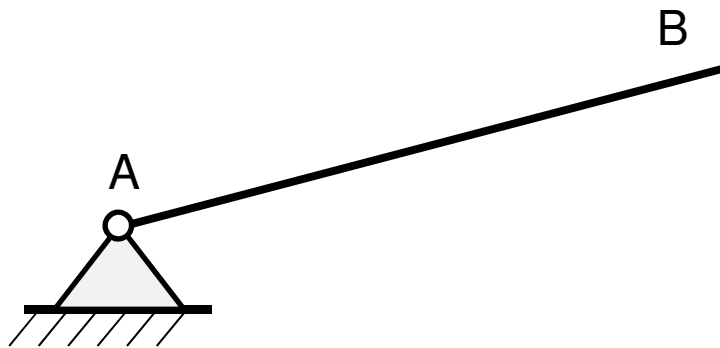
Questo vincolo consente solo la rotazione dell'asta, quindi è un vincolo doppio (2 GdV).



## Le reazioni vincolari

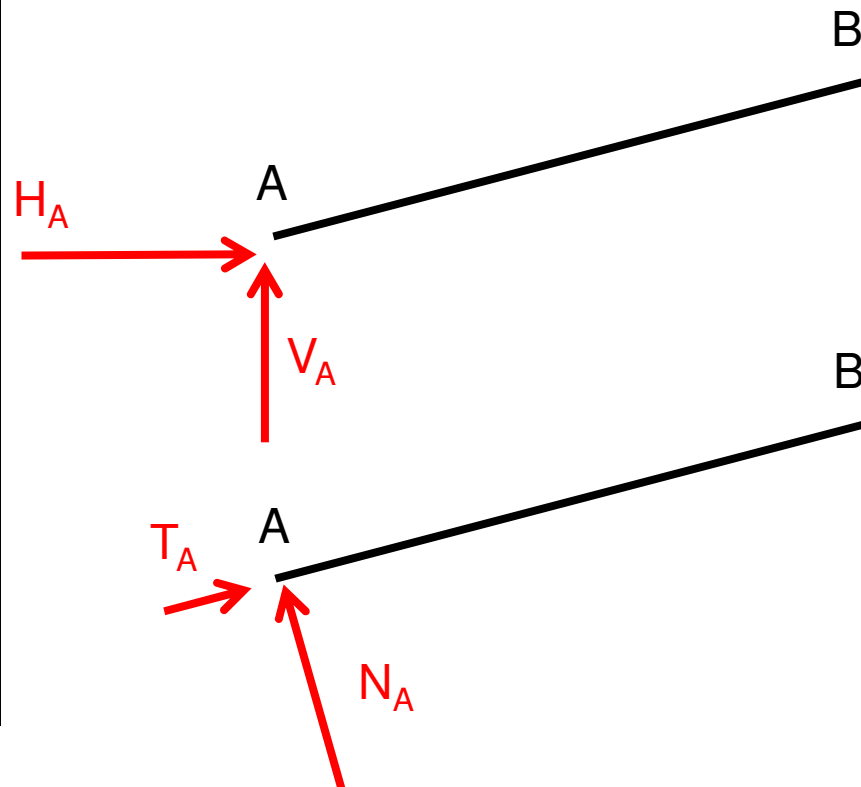
Le reazioni vincolari sono costituite da due forze in direzione orizzontale e verticale ( $H_A$  e  $V_A$ ) o in alternativa in direzione normale e tangenziale rispetto all'asta ( $N_A$  e  $T_A$ )

# Reazioni esercitate dai vincoli semplici



## Cerniera

Questo vincolo consente solo la rotazione dell'asta, quindi è un vincolo doppio (2 GdV).

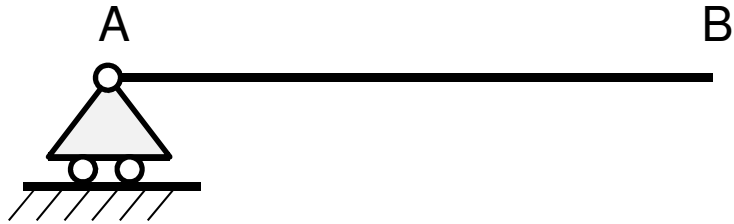


## Le reazioni vincolari

Le reazioni vincolari sono costituite da due forze in direzione orizzontale e verticale ( $H_A$  e  $V_A$ ) **o in alternativa in direzione normale e tangenziale rispetto all'asta** ( $N_A$  e  $T_A$ )

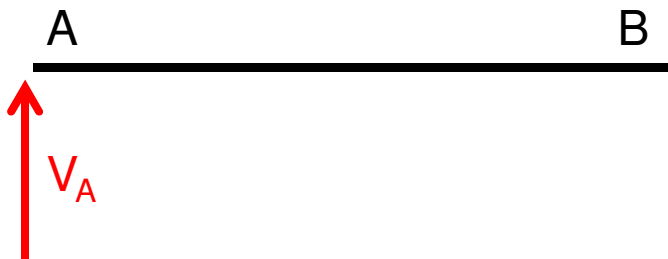
**Differenza?** Quando calcoleremo le azioni interne, saremo interessati ai contributi normali (azione normale, trazione/compressione) e tangenziali (taglio)

# Reazioni esercitate dai vincoli semplici



## Cerniera con carrello

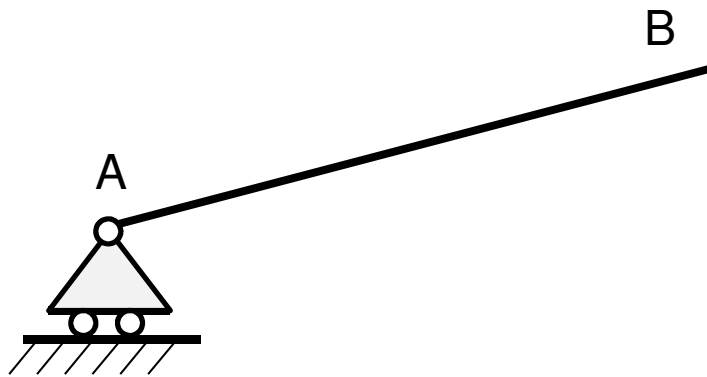
Questo vincolo consente la rotazione dell'asta e la sua traslazione orizzontale, impedendo solo lo spostamento verticale, quindi è un vincolo semplice (1 GdV).



## Le reazioni vincolari

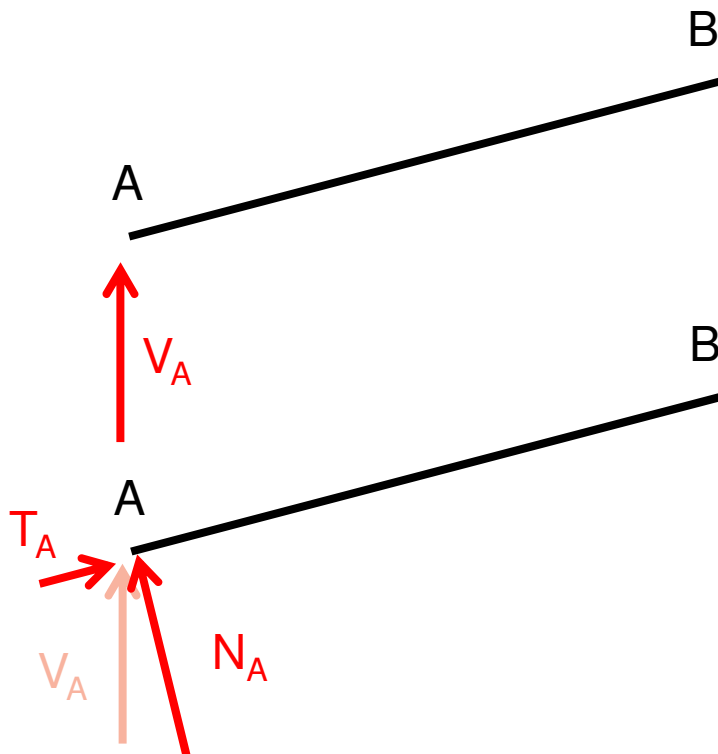
L'unica reazione vincolare del carrello è costituita da una forza verticale  $V_A$  ortogonale alla direzione di scorrimento

# Reazioni esercitate dai vincoli semplici



## Carrello

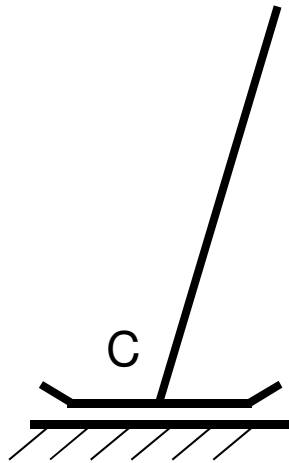
Questo vincolo consente la rotazione dell'asta, e la sua traslazione orizzontale quindi è un vincolo semplice (1 GdV).



## Le reazioni vincolari

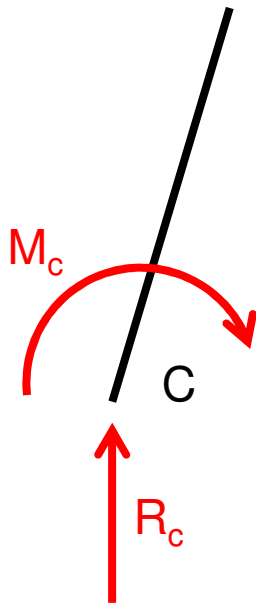
La forza di reazione è sempre perpendicolare alla direzione di scorrimento del carrello

# Reazioni esercitate dai vincoli semplici



## Pattino

Questo vincolo consente solo la traslazione lungo la retta di scorrimento, senza rotazioni (2 GdV), quindi con rotazione nel punto all'infinito in direzione perpendicolare alla retta di traslazione (CIR).

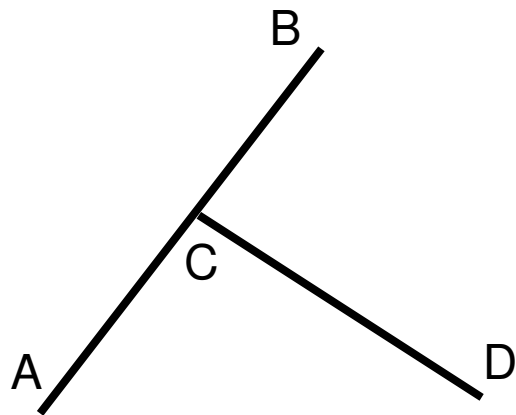


## Le reazioni vincolari

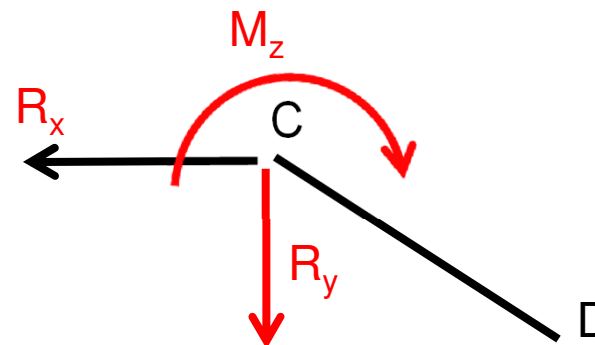
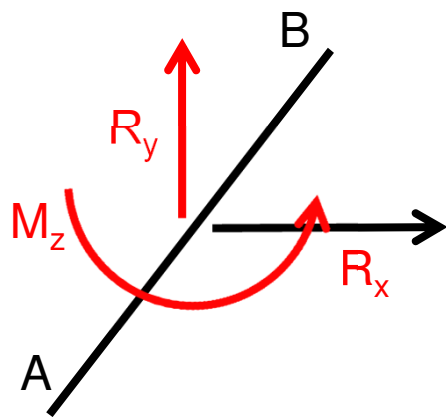
Le reazioni vincolari sono costituite da una forza in direzione perpendicolare alla retta di scorrimento ( $R_c$ ) e da un momento ( $M_c$ ).

# Vincoli tra corpi rigidi (vincoli interni)

Consideriamo ora i vincoli che permettono il collegamento tra due o più aste nel piano, valutando le reazioni vincolari interne presenti



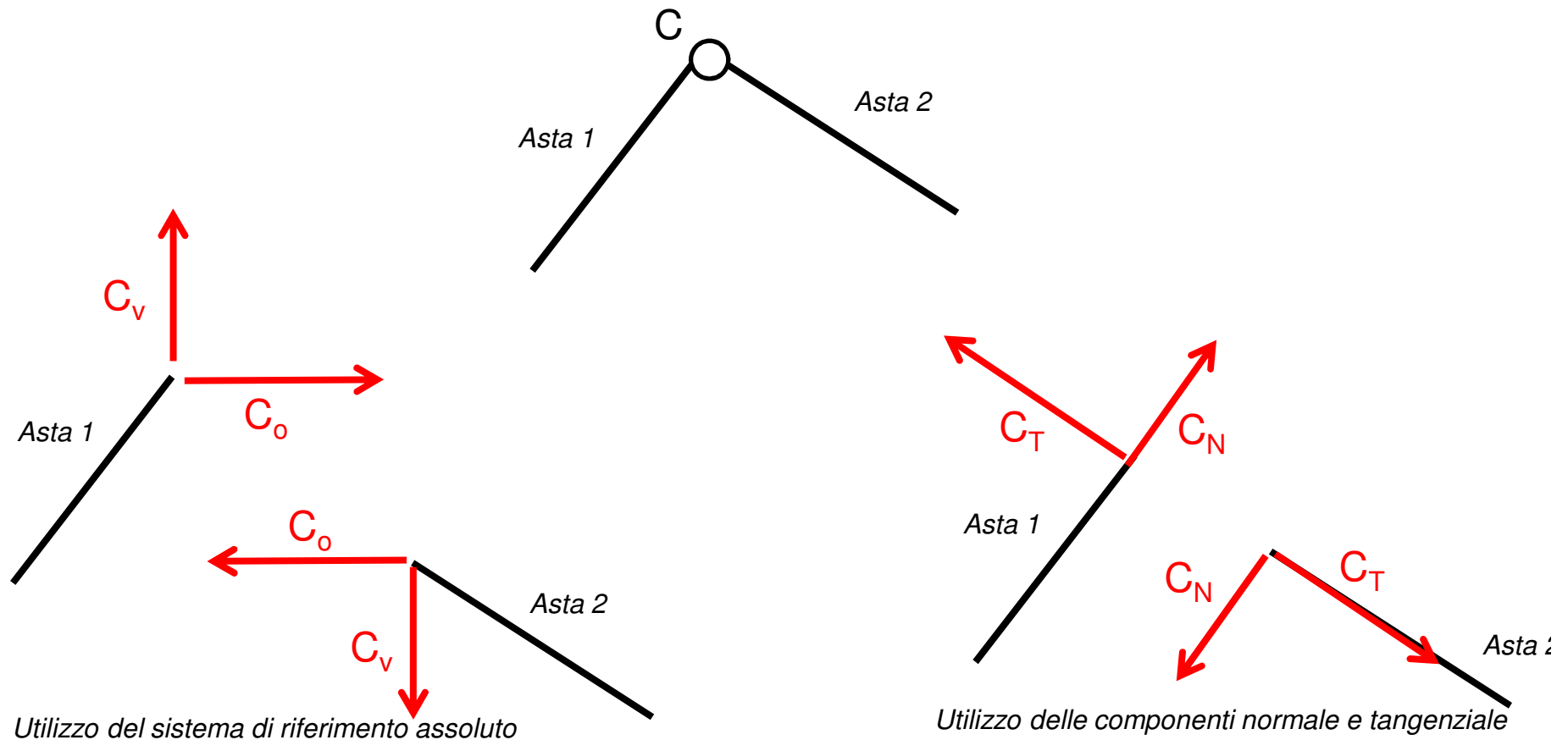
- Se separiamo due **aste collegate rigidamente o spezziamo un'asta singola**, possiamo mettere in evidenza due forze presenti nel punto di separazione ( $R_x$  e  $R_y$ ) e un momento ( $M_z$ )
- nei due spezzoni di asta saranno presenti forze e momenti uguali e contrari



# Vincoli tra corpi rigidi (vincoli interni)

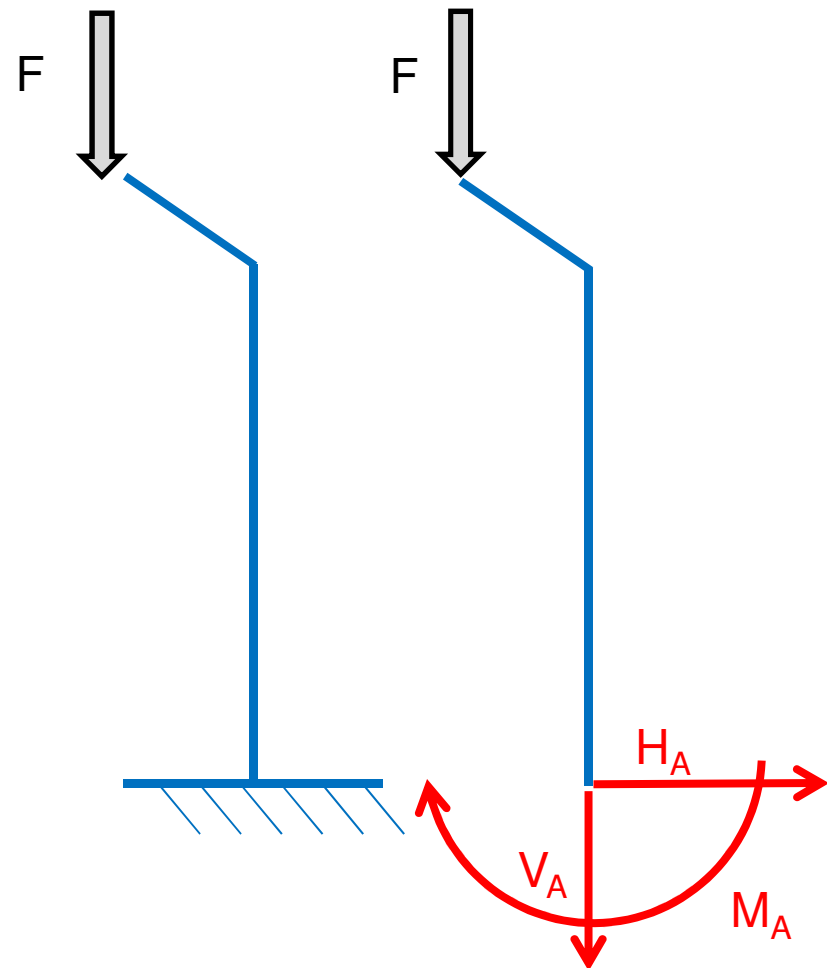
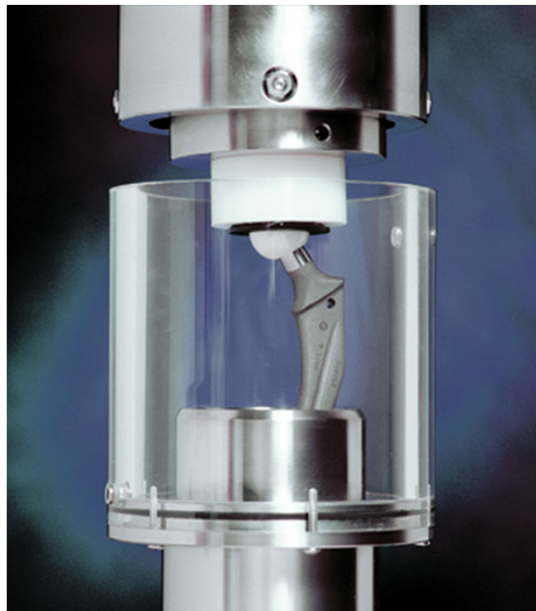
**Nel caso di cerniere interna tra due aste**, la separazione delle aste permette di evidenziare due forze presenti nel punto di separazione in direzione orizzontale e verticale ( $C_O$  e  $C_V$ ) o in direzione normale e tangenziale ( $C_N$  e  $C_T$ )

Nelle due aste saranno presenti forze uguali e contrarie.



# Carichi esterni e reazioni vincolari

Generalmente nelle applicazioni strutturali sono presenti sui componenti o sistemi **carichi esterni noti (forze e momenti)**, derivanti dalla funzione svolta, e **reazioni vincolari** originate dai vincoli che collegano il corpo o il sistema con il mondo esterno (a terra).





# Carichi esterni e reazioni vincolari

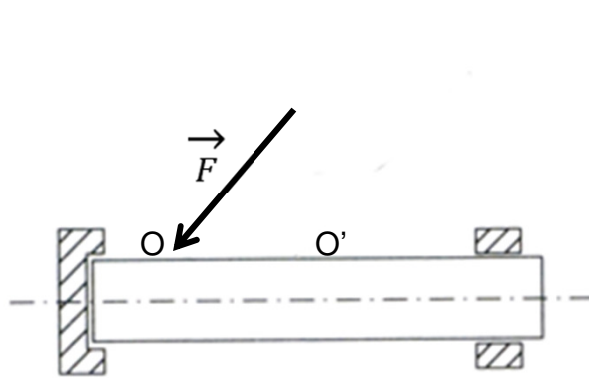
Generalmente nelle applicazioni strutturali sono presenti sui componenti o sistemi **carichi esterni noti (forze e momenti)**, derivanti dalla funzione svolta, e **reazioni vincolari** originate dai vincoli che collegano il corpo o il sistema con il mondo esterno (a terra).



Nelle operazioni da effettuare per il calcolo delle reazioni vincolari (incognite), possiamo utilizzare le seguenti regole:

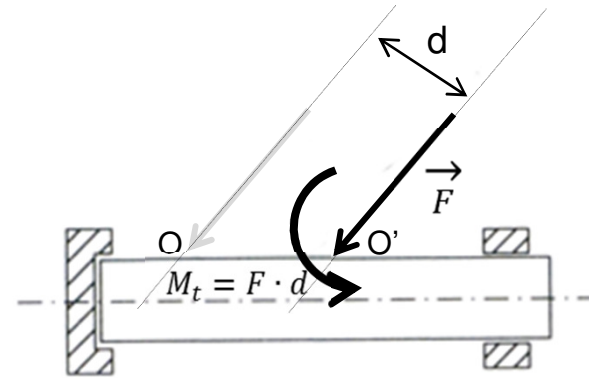
- 1) Le forze applicate possono essere **traslate lungo la propria retta di applicazione**, in quanto tali traslazioni non cambiano le condizioni di equilibrio nel corpo rigido.

# Carichi esterni e reazioni vincolari



$$M_O = 0$$

$$M_{O'} = F \cdot d$$

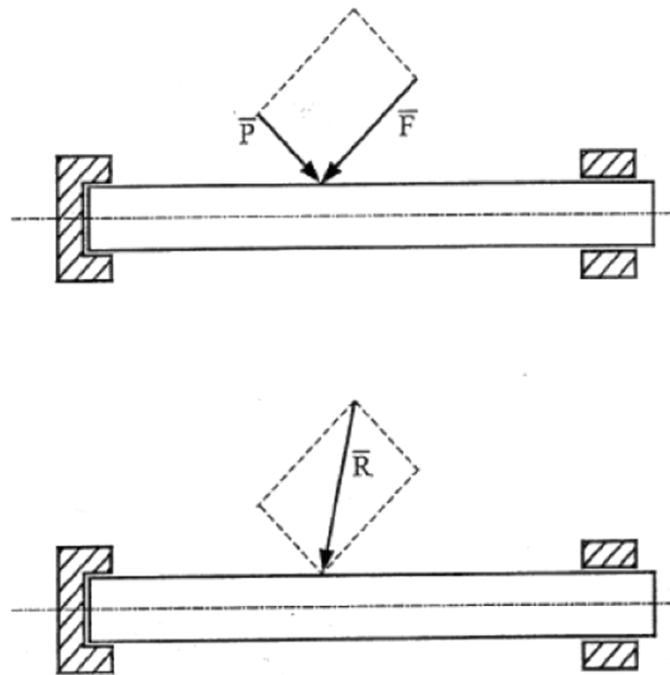


$$M_O = M_t - F \cdot d = 0$$

$$M_{O'} = 0 + M_t = F \cdot d$$

2) Le forze applicate possono essere spostate lungo una retta parallela, a patto di aggiungere un momento (denominato «**momento di trasporto**») pari al prodotto dell'intensità della forza per la distanza tra le rette di applicazione.

# Carichi esterni e reazioni vincolari



3) Ad un insieme di forze applicate nello stesso punto del corpo rigido è possibile sostituire la loro risultante (somma vettoriale).

# Carichi esterni e reazioni vincolari

Le equazioni di equilibrio del corpo rigido

1) La somma vettoriale di tutte le forze applicate al corpo è nulla

$$\sum \vec{F} = 0$$

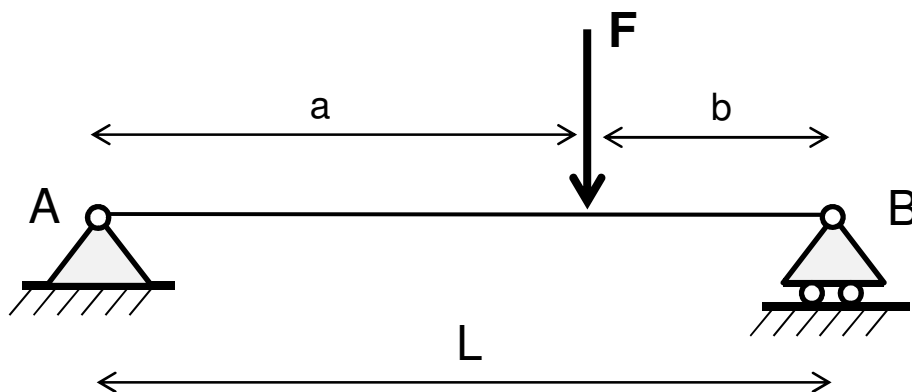
2) La somma vettoriale dei momenti applicati al corpo, calcolati rispetto ad un punto qualsiasi, è nulla

$$\sum \vec{M} = 0$$

possono essere utilizzate per **calcolare le reazioni vincolari**, operazione necessaria per configurare e dimensionare opportunamente il vincolo (ad es. cuscinetto) ma soprattutto **per poter valutare quali sono gli effetti dei carichi esterni** (e delle corrispondenti reazioni vincolari) **sulla condizione di sollecitazione interna della struttura.**

# Esempio 1

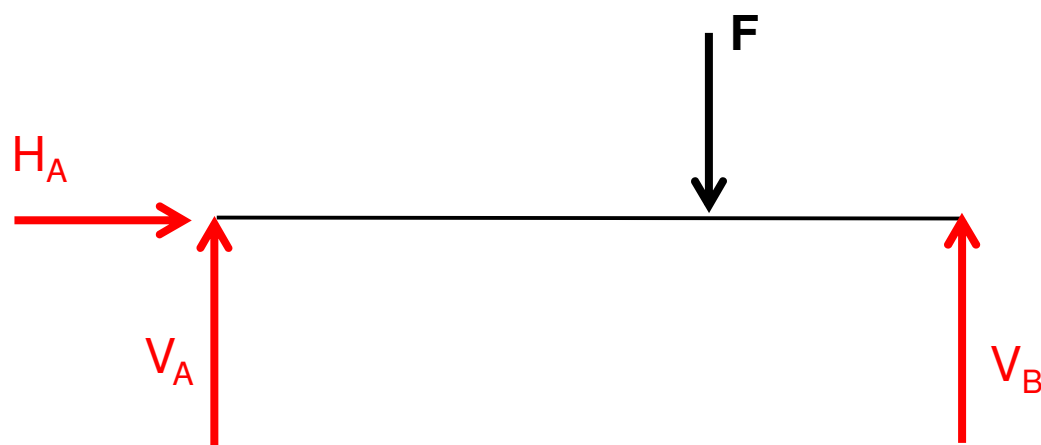
Calcoliamo ad esempio le reazioni vincolari della struttura in figura



$$\text{GdL} = 3 \text{ (1 asta)}$$

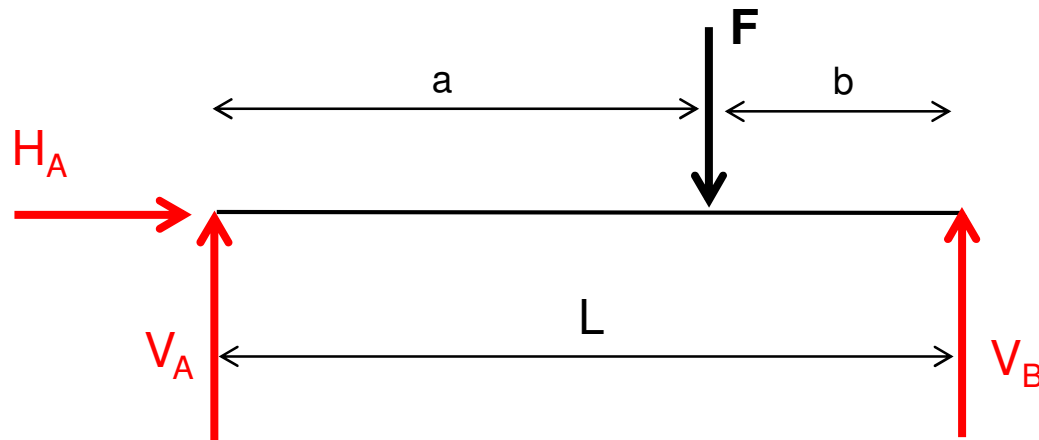
$$\text{GdV} = 2+1 = 3$$

**Il sistema è isostatico**



Sostituiamo ai vincoli le reazioni relative ai movimenti impediti

# Esempio 1



Sostituiamo ai vincoli le reazioni relative ai movimenti impediti

## Scriviamo le equazioni di equilibrio

### Traslazione orizzontale

$$\sum F_x = 0 \quad H_A = 0$$

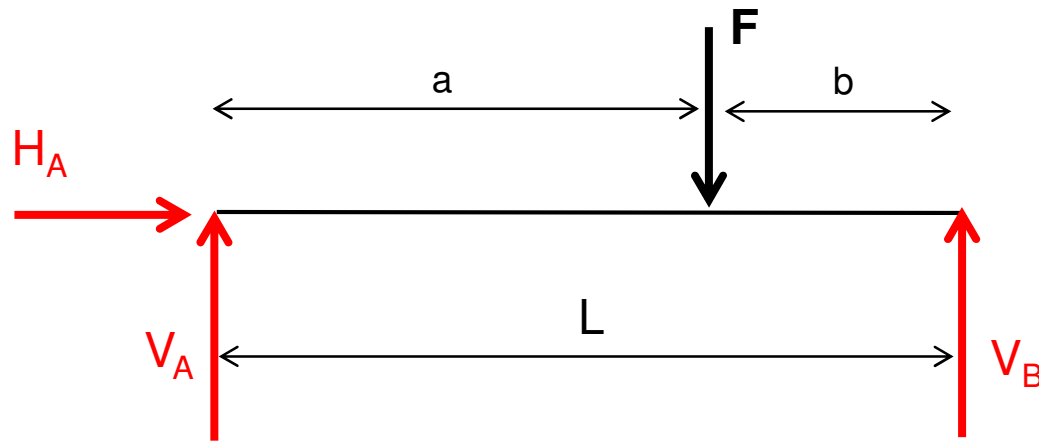
### Traslazione verticale

$$\sum F_y = 0 \quad V_A - F + V_B = 0 \Rightarrow V_A = F - V_B$$

### Rotazione intorno al punto A

$$\sum M_A = 0 \quad F \cdot a - V_B \cdot l = 0 \Rightarrow V_B = \frac{F \cdot a}{l}$$

# Esempio 1



Sostituiamo ai vincoli le reazioni relative ai movimenti impediti

$$\begin{cases} V_A = F - V_B \\ V_B = \frac{F \cdot a}{l} \end{cases} \Rightarrow V_A = F - \frac{F \cdot a}{l} \Rightarrow V_A = F \cdot \left(1 - \frac{a}{l}\right) \Rightarrow V_A = F \cdot \left(\frac{l-a}{l}\right) \Rightarrow V_A = \frac{F \cdot b}{l}$$

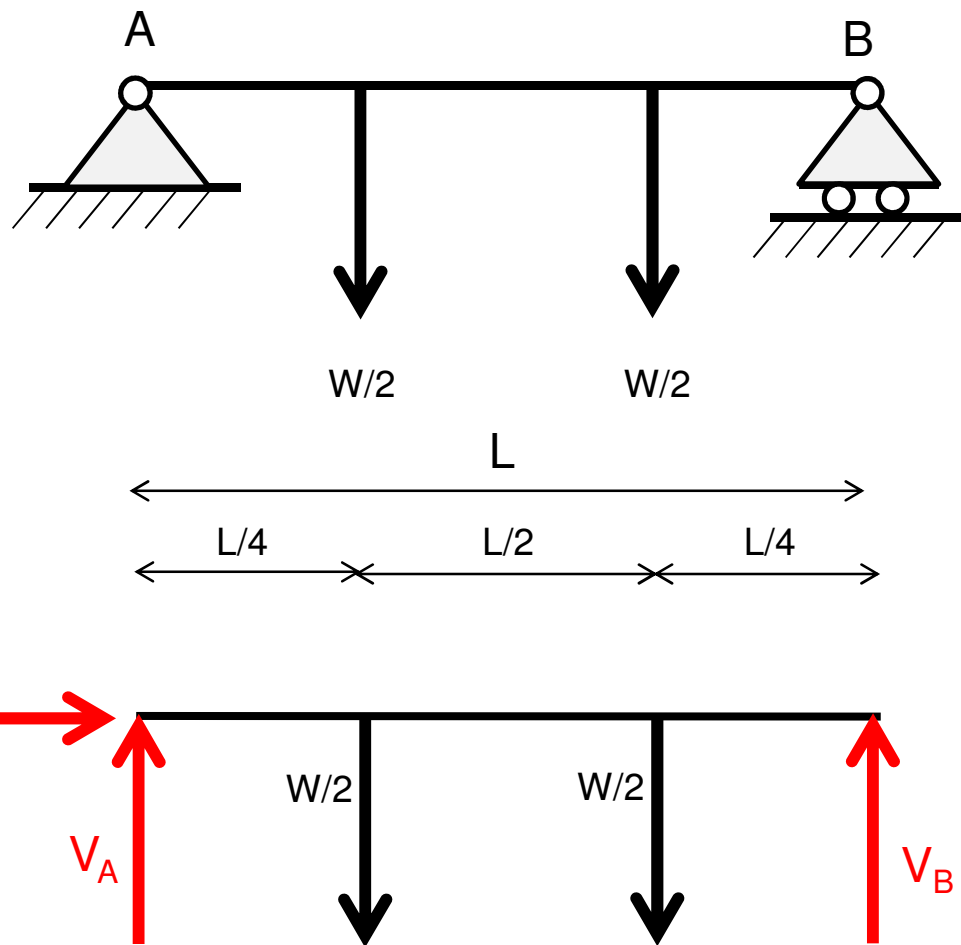
$$V_A = \frac{F \cdot b}{l}$$

$$V_B = \frac{F \cdot a}{l}$$

# Esempio 2

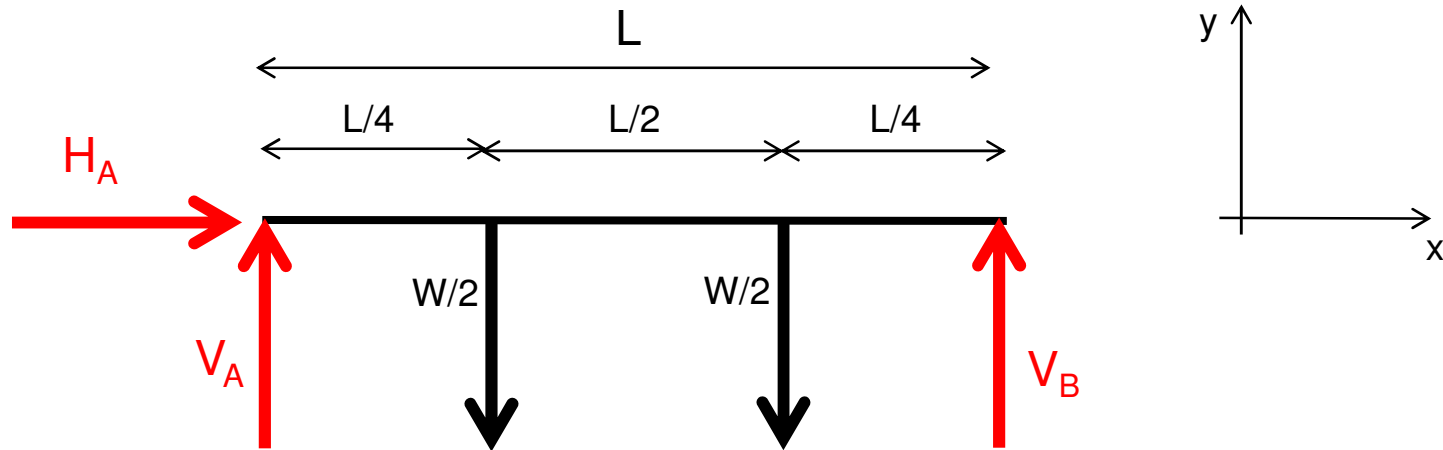
Calcoliamo ad esempio le reazioni vincolari della seguente asta vincolata isostaticamente:

Peso corporeo =  $W$





## Esempio 2



**Scriviamo le equazioni di equilibrio**

**Traslazione orizzontale**

$$\sum F_x = 0 \quad H_A = 0$$

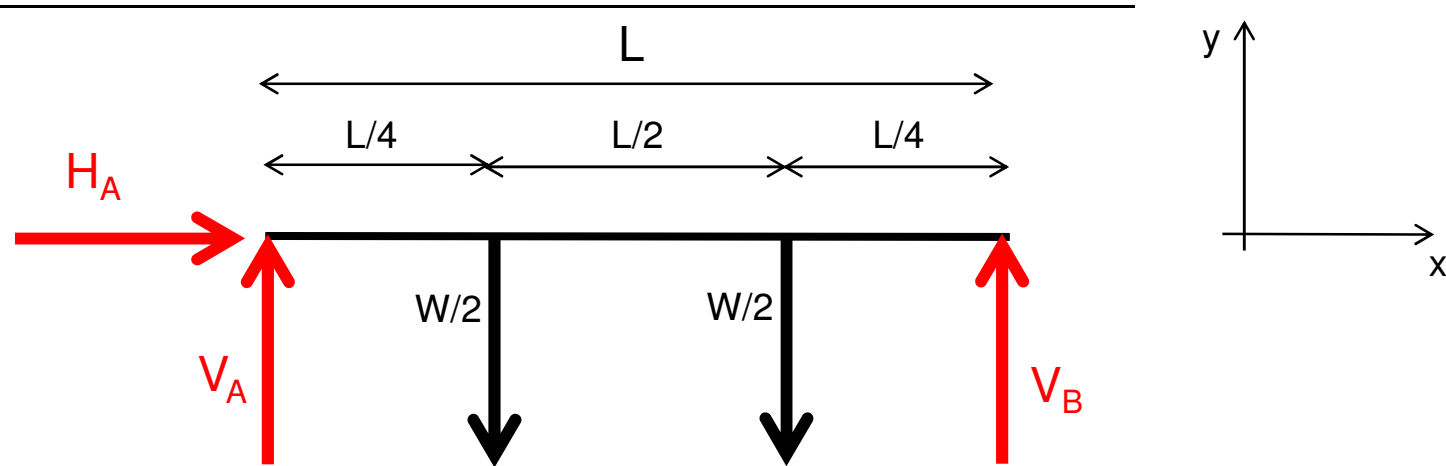
**Traslazione verticale**

$$\sum F_y = 0 \quad V_A - \frac{W}{2} - \frac{W}{2} + V_B = 0$$

**Rotazione intorno al punto A**

$$\sum M_A = 0 \quad \left( \frac{W}{2} \cdot \frac{L}{4} \right) + \left[ \frac{W}{2} \cdot \left( \frac{L}{2} + \frac{L}{4} \right) \right] - V_B \cdot L = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B = \frac{\left( \frac{W}{2} \cdot \frac{L}{4} \right) + \left[ \frac{W}{2} \cdot \left( \frac{L}{2} + \frac{L}{4} \right) \right]}{L}$$

# Esempio 2



## Traslazione verticale

$$\sum F_y = 0 \quad V_A - \frac{W}{2} - \frac{W}{2} + V_B = 0 \Rightarrow V_A = W - V_B$$

## Rotazione intorno al punto A

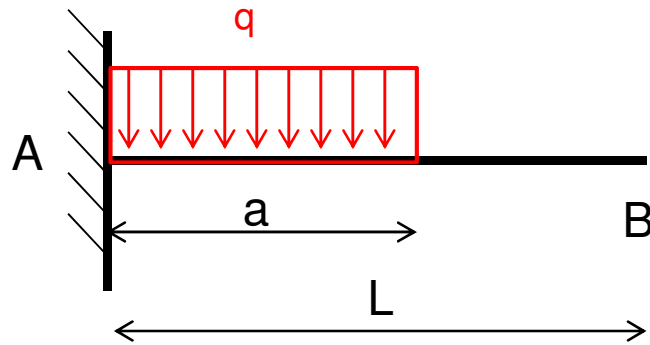
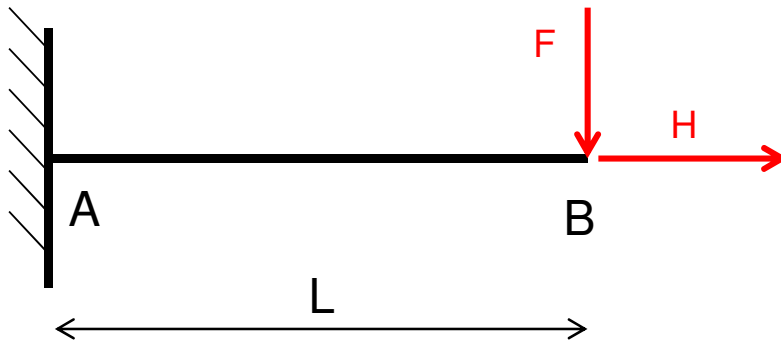
$$V_B = \frac{\left(\frac{W}{2} \cdot \frac{L}{4}\right) + \left[\frac{W}{2} \cdot \left(\frac{L}{2} + \frac{L}{4}\right)\right]}{L} \Rightarrow \frac{\frac{W \cdot L}{8} + \left(\frac{W}{2} \cdot \frac{3 \cdot L}{4}\right)}{L} \Rightarrow \frac{\frac{W \cdot L}{8} + \frac{3 \cdot W \cdot L}{8}}{L} \Rightarrow \frac{4 \cdot W \cdot L}{8 \cdot L}$$

$$V_B = \frac{W}{2}$$

$$V_A = \frac{W}{2}$$

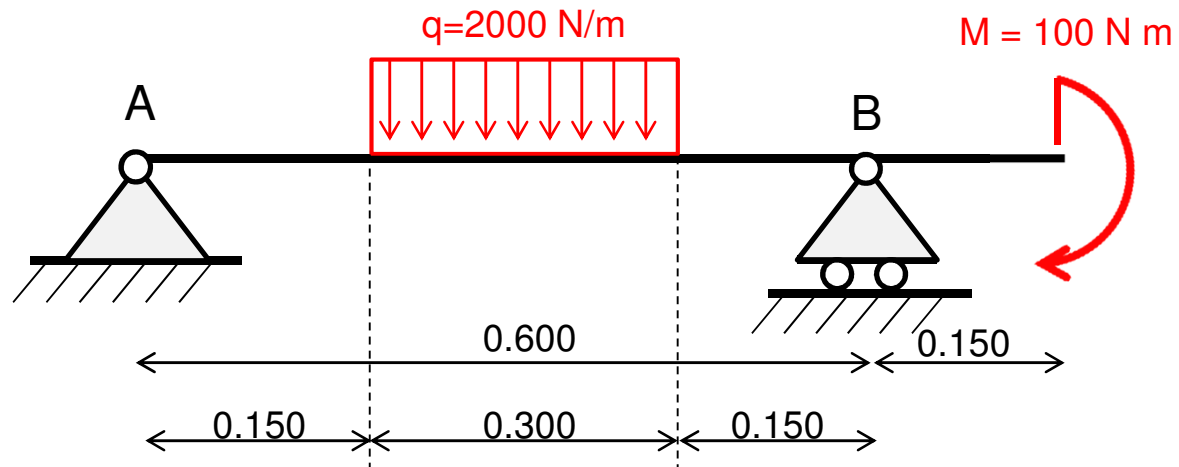
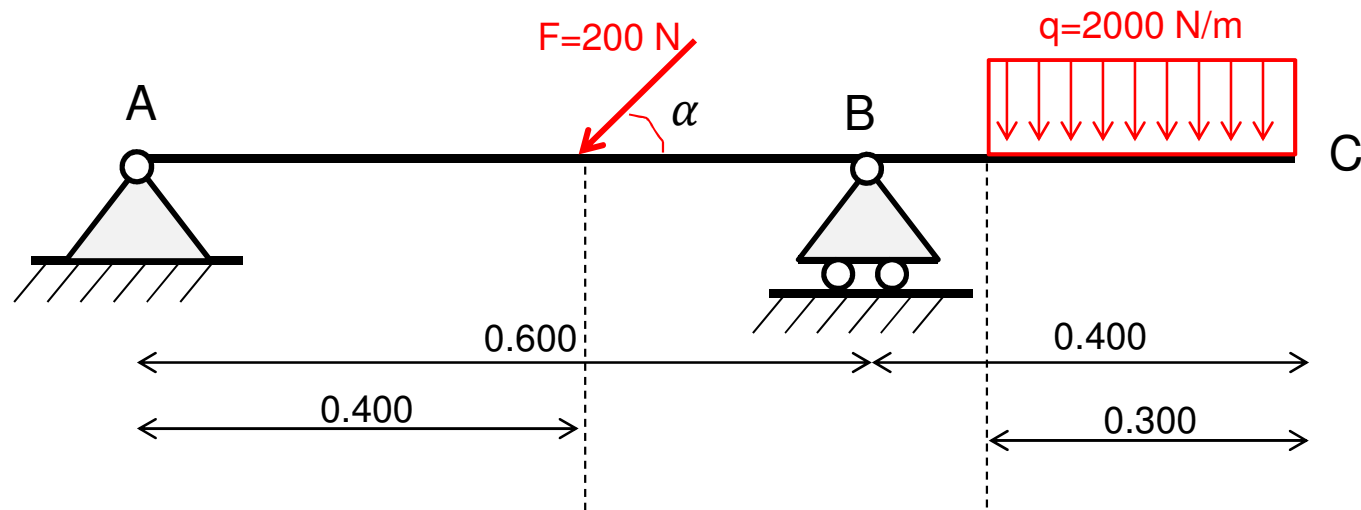
## Esempio 3-4

Calcoliamo ad esempio le reazioni vincolari delle seguenti strutture



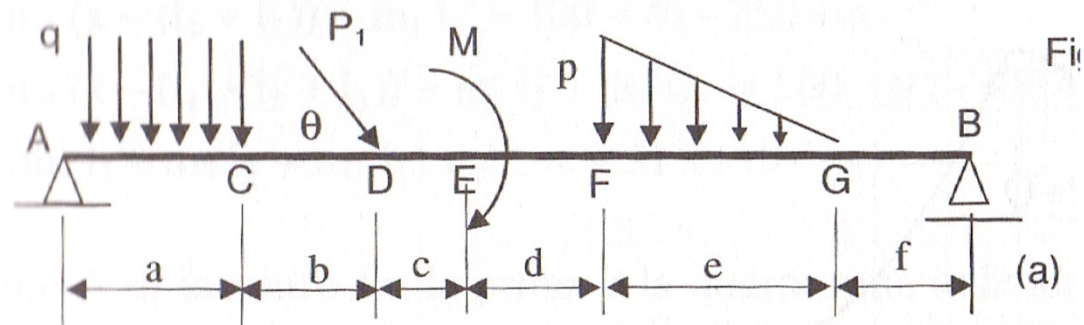
# Esempio 5-6

Calcoliamo ad esempio le reazioni vincolari delle seguenti strutture



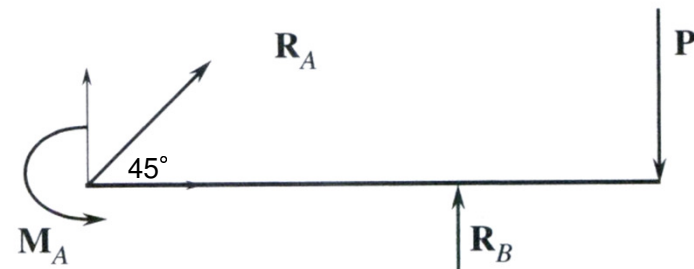
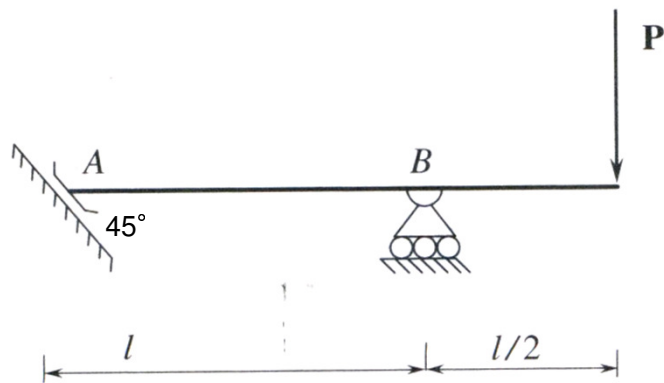
# Esempio 7

Calcoliamo ad esempio le reazioni vincolari della seguente asta vincolata isostaticamente:

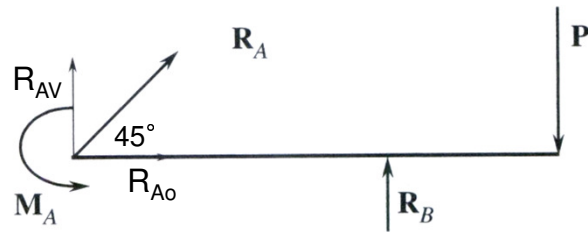


# Esempio 8

Calcoliamo ad esempio le reazioni vincolari della seguente asta vincolata isostaticamente:



## Esempio 8



$$R_{AV} = R_A \cdot \sin 45^\circ = R_A \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$R_{AO} = R_A \cdot \cos 45^\circ = R_A \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

### Scriviamo le equazioni di equilibrio

#### Traslazione orizzontale

$$\sum F_x = 0 \quad R_{AO} = R_A \cdot \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow R_A = 0$$

#### Traslazione verticale

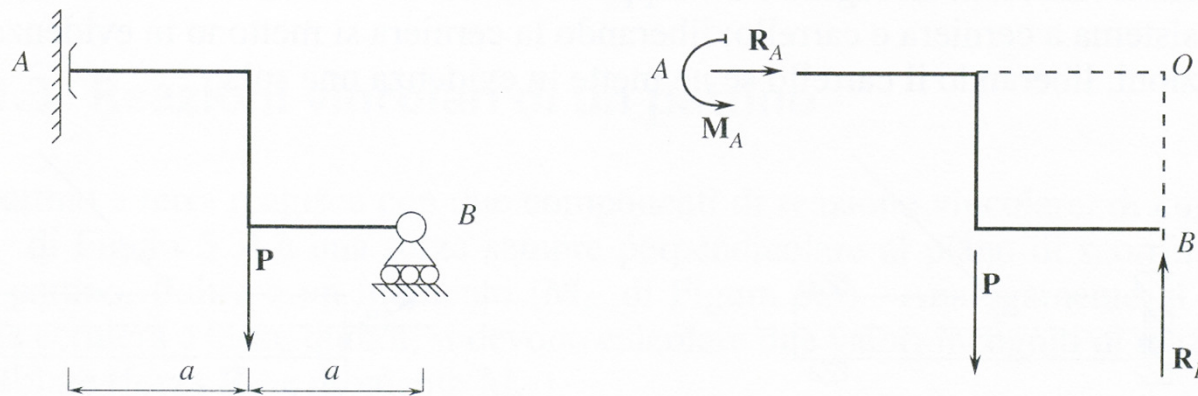
$$\sum F_y = 0 \quad \cancel{R_{AV}} + R_B - P = 0 \Rightarrow R_B - P = 0 \Rightarrow R_B = P$$

#### Rotazione intorno al punto B

$$\sum M_B = 0 \quad -M_A + P \cdot \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow M_A = P \cdot \frac{l}{2}$$

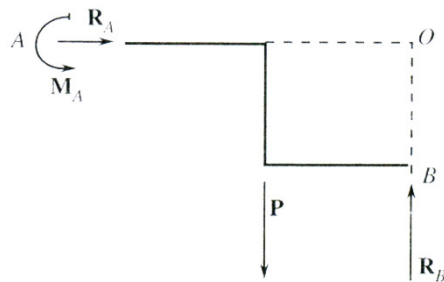
# Esempio 9

Calcoliamo ad esempio le reazioni vincolari della seguente asta vincolata isostaticamente:





# Esempio 9



Traslazione orizzontale

$$\sum F_x = 0 \quad R_A = 0$$

Traslazione verticale

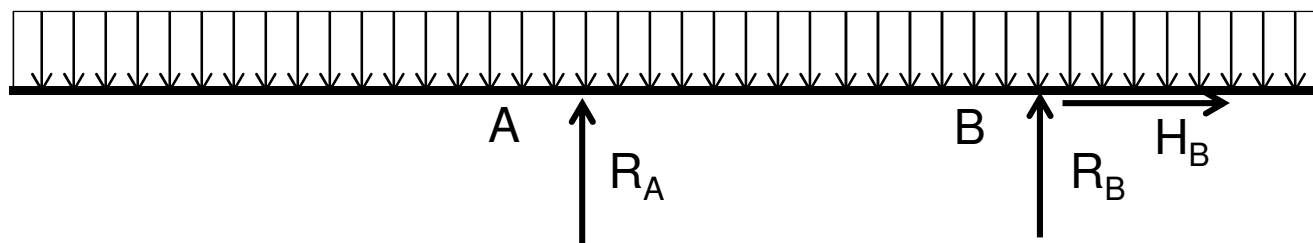
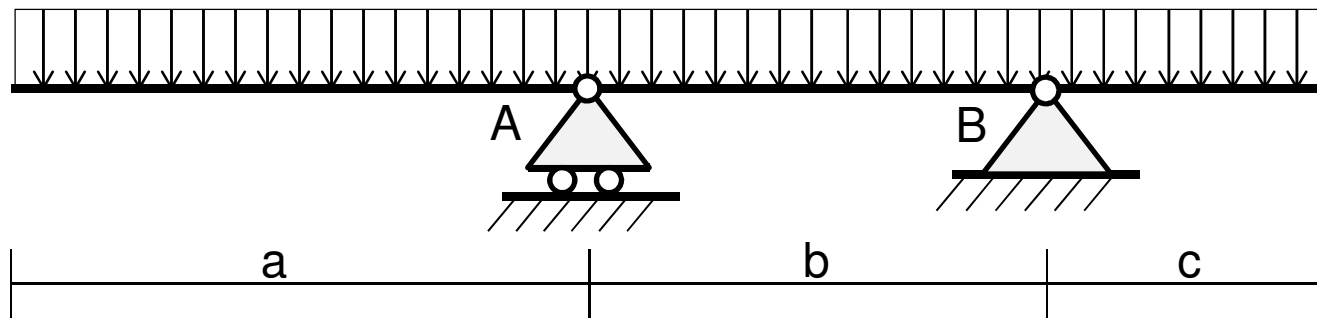
$$\sum F_y = 0 \quad R_B - P = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = P$$

Rotazione intorno al punto O

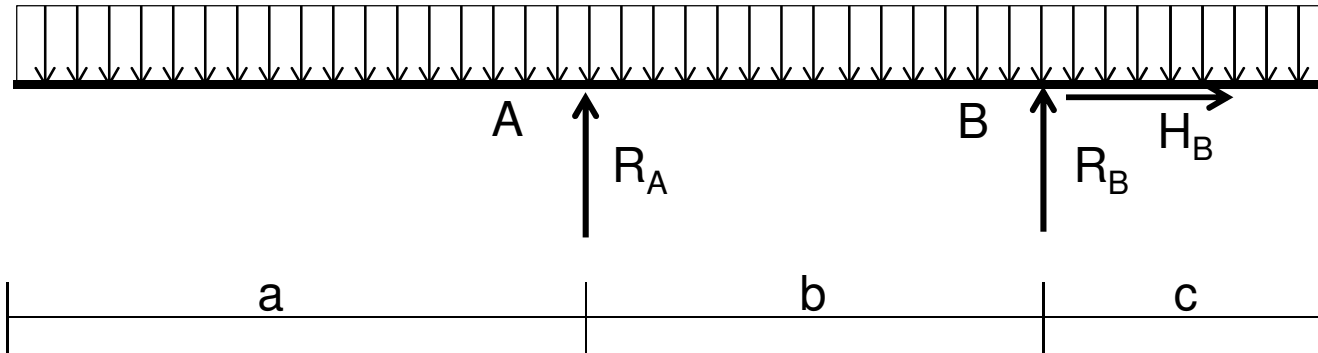
$$\sum M_O = 0 \quad -M_A - P \cdot a = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A = -P \cdot a$$

# Esempio 10

Calcoliamo ad esempio le reazioni vincolari della seguente asta vincolata isostaticamente (**carico uniformemente distribuito pari a  $q$**  (N/m))



# Esempio 10



**Scriviamo le equazioni di equilibrio**

**Traslazione orizzontale**

$$\sum F_x = 0 \quad H_A = 0$$

**Traslazione verticale**

$$\sum F_y = 0 \quad R_A + R_B - q \cdot (a + b + c) = 0$$

**Rotazione intorno al punto B**

$$\sum M_B = 0 \quad R_A \cdot b - (q \cdot a) \cdot \left( \frac{a}{2} + b \right) - (q \cdot b) \cdot \left( \frac{b}{2} \right) + (q \cdot c) \cdot \left( \frac{c}{2} \right) = 0$$